تم بيـع أكثر من ٣٠ مليـون نسخـة من ملخصات شـوم!

حساب المثلثات

ملخصات شوم إيزي

- يغطى جميع أساسيات المنهج
- يحتوى على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً
- أفضل وسيلة دقيقة وموجزة لمساعدة الطالب على التفوق والنجاح

أيرز
موير



الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.
مصر

حساب المثلثات

المؤلف

د. فرانك أيرز

د. روبرت موير

محرر الموجز

د. چورچ ج. هادمينوس

ترجمة

مهندس/ سعيد فرج إسكندر

مهندس بالتعليم الفنى

مراجعة

د. / إنتصارات محمد حسن الشبكى

أستاذ الرياضيات البحتة ورئيس القسم السابق

كلية علوم ـ جامعة عين شمس

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م

مصر

حقوق النشر

Trigonometry

by

Frank Ayres

Robert Moyer

International House for Cultural Investments S.A.E.

8, Ibrahim El-Orabi St., El-Nozha El-Gedida

Heliopolis West, Cairo, Egypt

E-mail: ihci@link.net

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابى - النزهة الجديدة - مصر الجديدة - القاهرة - ج. م. ع.

ص. ب: 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة - تليفون: 6222105/6221944 فاكس: 6221944 (00202)

بريد إلكترونى: ihci@link.net

رقم الإيداع: 2003/9481

I.S.B.N: 977-282-145-7

كتب أخرى فى
سلسلة ملخصات شوم إيـزى

ملخص شوم إيـزى : الفيزياء العامة
ملخص شوم إيـزى : الفيزياء التطبيقية
ملخص شوم إيـزى : الكهرومغناطيسيات
ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العامة
ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العضوية
ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا
ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا الجزيئية وبيولوچيا الخلية
ملخص شوم إيـزى : الوراثة
ملخص شوم إيـزى : الجبر العام
ملخص شوم إيـزى : الجبر الأساسى
ملخص شوم إيـزى : الهندسة
ملخص شوم إيـزى : الاحتمالات والإحصاء
ملخص شوم إيـزى : الإحصاء
ملخص شوم إيـزى : مبادئ التفاضل والتكامل
ملخص شوم إيـزى : حساب التفاضل والتكامل
ملخص شوم إيـزى : مرجع رياضى لأهم القوانين والجداول
ملخص شوم إيـزى : الرياضيات المنفصلة
ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة C++
ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة JAVA
ملخص شوم إيـزى : أساسيات الكهرباء
ملخص شوم إيـزى : مبادئ الاقتصاد
ملخص شوم إيـزى : الإحصاء التجارى
ملخص شوم إيـزى : مبادئ المحاسبة
ملخص شوم إيـزى : مقدمة فى علم النفس

فرانك أيرز

سبق له العمل كأستاذ ورئيس لقسم الرياضيات بكلية ديكنسون بمدينة كارل أيسل بولاية بنسلفانيا. وهو مؤلف ثمانية كتب بعنوان ملخصات شوم منها علم حساب التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية والرياضيات العامة.

روبرت موير

مدرس الرياضيات بجامعة ولاية فورت فالى بمدينة فورت فالى بولاية جورجيا وسبق له العمل رئيسًا لقسم الرياضيات والفيزياء. كما سبق له العمل مستشاراً للرياضيات للجمعية التعاونية للمدارس العامة لخمس مقاطعات. كما درس الرياضيات بالمدارس الثانوية فى الينوى. حصل على درجة الدكتوراه فى تعليم الرياضيات من جامعة الينوى ودرجتى البكالوريوس والماجستير من جامعة الينوى الجنوبية.

چورچ ج. هادمينوس

دَرَسَ فى جامعة دالاس وأجرى أبحاثًا لدى المركز الطبى لجامعة ماساشويستس وجامعة كاليفورنيا فى لوس أنجلوس. وهو حاصل على درجة البكالوريوس من جامعة ولاية أنجلو ودرجتى الماجستير والدكتوراه من جامعة تكساس بدالاس. وهو مؤلف عدة كتب ضمن سلسلة شوم وملخصات شوم إيزى.

المحتويات

الفصل الأول
الزوايا وتطبيقاتها
Angles and Applications

فى هذا الفصل:

- ✔ مقدمة
- ✔ الزاوية المستوية
- ✔ قياس الزوايا
- ✔ طول القوس
- ✔ أطوال الأقواس لدائرة الوحدة
- ✔ مساحة القطاع
- ✔ السرعة الزاوية

مقدمة Introduction



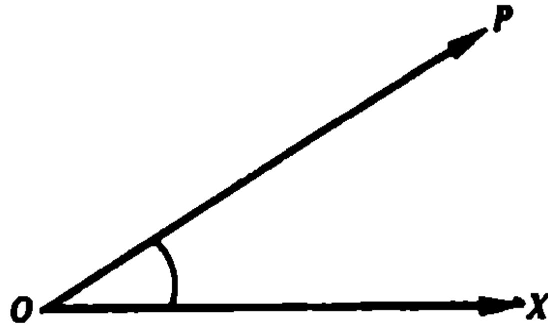
علم حساب المثلثات كما هو واضح من الاسم، يشمل قياس أضلاع وزوايا المثلث. وحساب المثلثات المستوى موضوع هذا الكتاب، يختص بدراسة المثلثات فى مستوى واحد. وأساس علم حساب المثلثات هو مجموعة من النسب تسمى

الدوال المثلثيـــة Trigonometric Functions، وســوف نقـوم بتفسـيرها فــى الفصل التالى. ومن التطبيقات المبكرة اســتخدام الـدوال المثلثيـة فـي علوم المساحة والملاحة والهندســة. وتلعــب هــذه الـدوال أيضًــا دوراً هامًا فى دراسة كل أنواع ظواهر التردد كالصوت والضوء والكهرباء.

وبالتالى سنقدم جزءاً معقولاً من الكتــاب يتعلـق بدراســة الخــواص والعلاقات بين الدوال المثلثية.

الزاوية المستوية Plane Angle

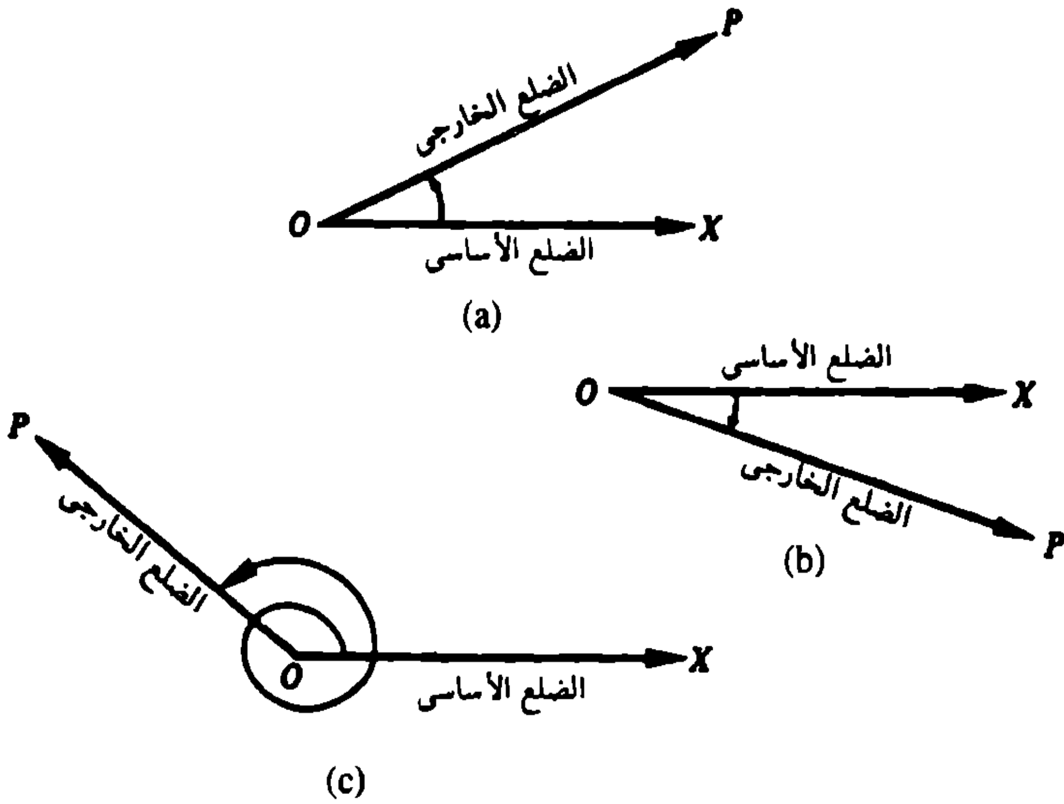
الزاوية المستوية XOP كما هو موضح بشكـل 1-1 مكونـة مـن شعــاعين OP و OX. وتســمى نقطـة O بـرأس الزاويـة والشعاعـان همــا ضلعــا الزاوية.



شكل 1-1

وتسمى الزاوية زاوية موجبة إذا كان اتجاه الدوران (المحدد بــالقوس) عكس اتجاه دوران عقارب الساعة وسالبة إذا كان اتجــاه الـدوران مـع عقارب الساعة.

الزاوية موجبة فى شكل 1-2(a) و 1-2(c) وسالبة فى شكل 1-2(b).



شكل 1-2

قياس الزوايا Measures of Angles

تعرف الدرجة (°) كوحدة قياس لزاوية مركزية لقوس من دائــرة يســاوى 1/360 من محيط الدائرة.

الدقيقة (′) = 1/60 مــن الدرجــة، الثانيــة (″) = 1/60 مــن الدقيقــة أو 1/3600 من الدرجة. عند تحويل الكسر العشرى من الدرجة إلى دقــائق أو ثوانى فإن القاعدة العامة هى تحويل الجزء العشرى إلى أقرب دقيقة وباقى الزوايا الأخرى تقرب إلى أقرب جزء مــن المئــة ثــم إلــى أقــرب ثانية. وعند تحويل دقائق وثوانى الزوايا إلى كسر عشرى تحول الدقــائق من الزوايا إلى جزء عشرى والثوانى إلى جزء مئوى.

مثال 1.1: Example 1.1

(a) $62.4° = 62° + 0.4\,(60') = 62°24'$

(b) $23.9° = 23° + 0.9\ (60') = 23°54'$

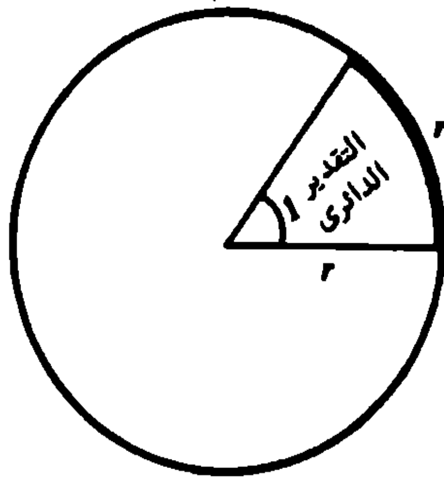
(c) $29.23° = 29° + 0.23\ (60') = 29°13.8' = 29°13' + 0.8\ (60'')$
$= 29°13'48''$

(d) $37.47° = 37° + 0.47\ (60') = 37°28.2' = 37°28' + 0.2\ (60'')$
$= 37°28'12''$

(e) $78°17' = 78° + 17°/60 = 78.3°$ (مقربة إلى جزء عشرى)

(f) $58°22'16'' = 58° + 22°/60 + 16°/3600 = 58.37°$ (مقربة إلى جزء مئوى)

التقدير الدائرى (rad) يعـرف بأنـه هـو الزاويـة المركزيـة المرسـومة لقوس من دائرة يساوى نصف قطر الدائرة. انظر شكل 3-1.



شكل 3-1

محيط الدائرة = $2\pi r$ حيث أن r هو نصف قطر الدائـرة وزاويـة مركزيـة مقدارها 360°. لذلك

∴ 1 (دائرى) = $180°/\pi = 57.286° = 57°\ 17'45''$

و 1 (درجة) = $\pi/180$ دائرى 0.107453 .rad

حيث أن : $\pi = 3.14159$

Example 1.2 (a) $7/12\ \pi$ rad = $(7\pi/12)(180°/\pi) = 105°$ **مثال 1.2:**

التحويل من دائرى إلى درجات ستينية.

(b) $50° = 50(\pi/180)$ rad = $(5\pi/18)$ rad

التحويل من درجات ستينية إلى دائرى.

Arc Length طول القوس

في دائرة نصف قطرها r، وزاوية مركزيــة مقدارهــا θ بــالتقدير الدائــرى radians، شكل 1-4 فإن طول القوس s المحدد بالزاوية المركزية θ:

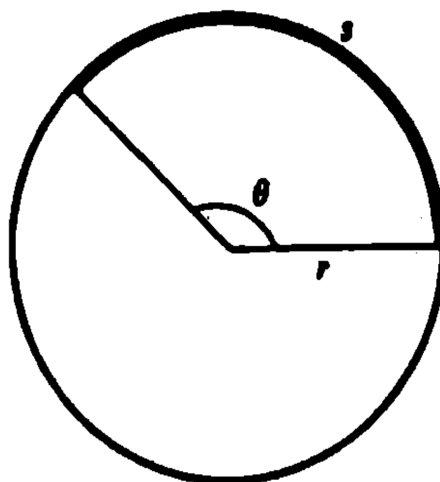
$$s = r\theta$$

أى أن:

طول القوس = نصف قطر الدائرة × الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى

☆ ملاحظة!

يمكن قياس s و r بأى وحدات قياس طول مناسبة ولكن يجب أن تكــون وحدة القياس موحدة للطرفين.



شكل 1-4

مثال 1.3 (a) طول القوس لدائرة نصف قطرها 30 بوصة لزاويـــة مركزيـة مقدارها 1/3 دائرى هو:

Example 1.3 (a) On a circle of radius 30 in, the length of the arc intercepted by a central angle of 1/3 rad is:

$$s = r\theta = 30(1/3) = 10 \text{ in}$$

(b) على نفس الدائرة. طول القـــوس لزاويـة مركزيـة مقدارهـا 50° هو:

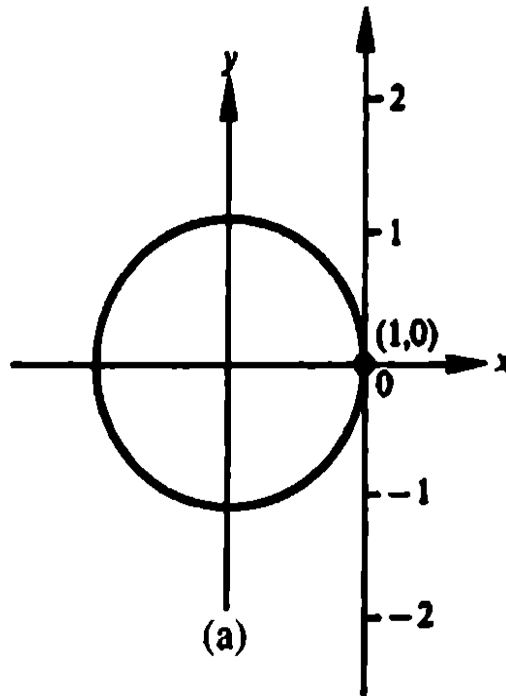
(b) On the same circle, a central angle of 50° intercepts an arc of length:

$$s = r\theta = 30(5\pi/18) = 25\pi/3 \text{ in}$$

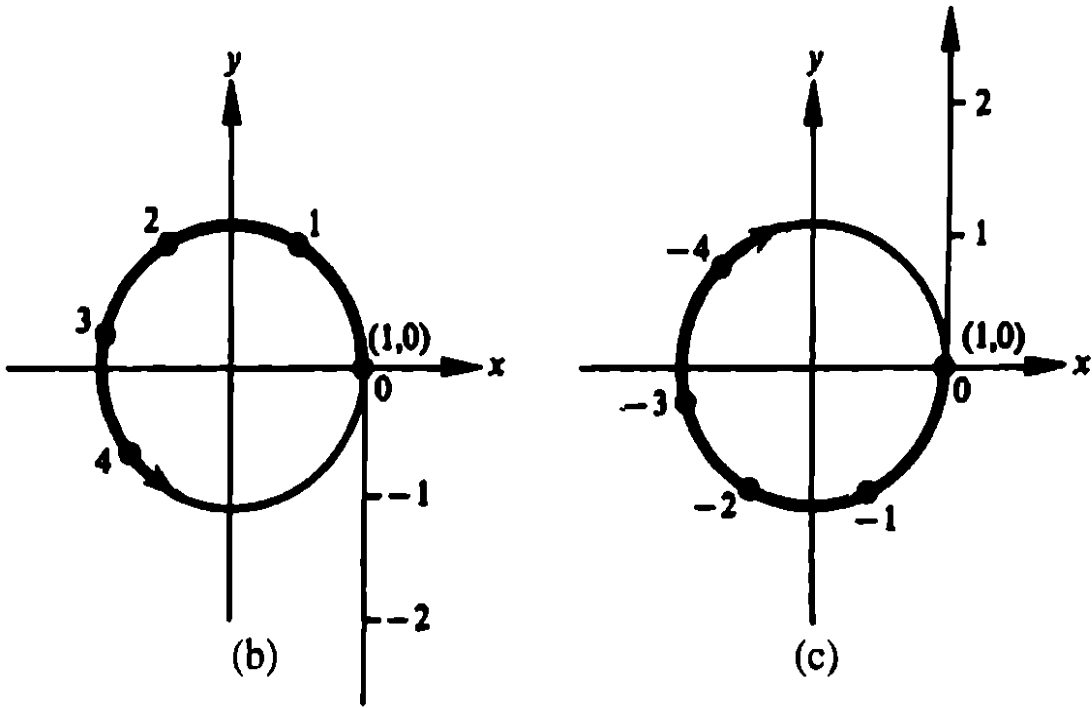
أطوال الأقواس لدائرة الوحدة

Lengths of Arcs on a Unit Circle

العلاقة بين النقط التى تقع على خط الأعداد الحقيقية والنقط التى تقع على دائرة الوحدة $x^2 + y^2 = 1$ التى مركزها نقطة الأصل موضحة بالشكل 1-5.



شكل 1-5



(تابع) شكل 1-5

الصفر 0 معلوم على خط الأعداد بالنقطة (1,0) كما هو موضح بشكل 1-5(a). الأعداد الحقيقية الموجبة موضحة على الدائرة عكس دوران عقارب الساعة شكل 1-5(b). والأعداد الحقيقية السالبة موضحة على الدائرة فى اتجاه دوران عقارب الساعة شكل 1-5(c). وكل نقطة على دائرة الوحدة معلومة بعدة قيم لأعداد حقيقية سواء موجبة أو سالبة.

نصف قطر دائرة الوحدة طوله الواحد الصحيح، ولذلك فإن محيط الدائرة المعلوم بالقانون $2\pi r$. (هو 2π) ونصف محيط الدائرة = π وربع المحيط = $\pi/2$. وكل عدد موجب يقابل طول القوس من الدائرة s، ومن القانون $\theta = \theta$ .1 = $r\theta$ = s وكل عدد حقيقى يقابل الزاوية θ بالتقدير الدائرى. ومن جهة أخرى كل عدد حقيقى سالب يقابل (سالب طول القوس).

أى أنه يقابل الزاوية السالبة للقوس بالتقدير الدائرى.

Area of a Sector — مساحة القطاع

مساحة القطاع K لدائرة نصف قطرها r وزاوية القوس المركزية θ بالتقدير الدائرى هى

$$K = \tfrac{1}{2} r^2\theta$$

أى أن: مساحة القطاع للدائرة =

½ × نصف قطر الدائرة × نصف قطر الدائرة × الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى .

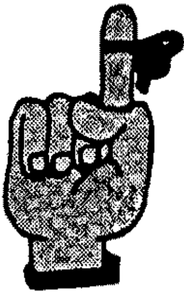
ملاحظة!

وحدة قياس مساحة القطاع هى مربع وحدة المساحة حسب وحدة قياس الطول.

مثال 1.4 أوجد مساحة القطاع لدائرة نصف قطرها 18 cm، ومحدودة بزاوية مركزية مقدارها 50°.

Example 1.4 For a circle of radius 18 cm, the area of a sector intercepted by a central angle of 50° is

$$K = \tfrac{1}{2} r^2\theta = \tfrac{1}{2} (18)^2\, 5\pi/18 = 45\,\pi \text{ cm}^2 \text{ or } 141 \text{ cm}^2$$ (تقريبًا)



تذكر!

بالتقدير الدائرى $50^\circ = 5\pi/18$

السرعة الزاوية Angular Velocity

العلاقة بين السرعة الخطية v والسرعة الزاوية ω (الحرف اللاتينى أوميجا) لجسم نصف قطره r هى:

$$v = r\omega$$

حيث أن وحدة قياس ω بالتقدير الدائرى بالنسبة لوحدة الزمن ووحدة قياس v هى وحدة مسافة بالنسبة للزمن.

> v، ω لهما نفس وحدة القياس بالنسبة للزمن r و v لهما نفس وحدة القياس الطولية (الخطية).

مثال 1.5 دراجة تهبط منحدر بسرعة 15 ميل/ساعة. أوجد السرعة الزاوية للدراجة (لفة/دقيقة) إذا كان قطر الطارة 20 بوصة.

Example 1.5 A bicycle with 20-in wheels is traveling down a road at 15 mi/h. Find the angular velocity of the wheel in revolutions per minute.

نصف قطر طارة الدراجة هو 10 بوصات والسرعة الزاوية المطلوبة بعدد اللفات/دقيقة لذلك يجب تحويل السرعة الخطية 15 ميل/ساعة إلى وحدة بوصة/دقيقة in/min.

v = 15 mi/h
= (15/1)(mi/h)·(5280/1)(ft/mi)·(12/1)(in/ft)·(1/60)(h/min)
= 15,840 in/min

$\omega = v/r$ = (15,840/10)(rad/min) = 1584 rad/min

لتحويل ω إلى عدد لفات/دقيقة نضرب فى $^1/_{2\pi}$ لفة لكل زاوية نصف قطرية (r/rad).

$$\omega = 1584 \text{ rad/min} = (1584/1)(\text{rad/min})\cdot(1/2\pi)(\text{r/rad})$$
$$= (792/\pi)(\text{r/min}) \text{ or } 252 \text{ r/min}$$

مسألة محلولة 1.1 باعتبار أن الأرض عبارة عن كرة نصف قطرها 3960 ميل. أوجد البعد الزاوى لنقطة تصنع زاوية مقدارها 36° شمال خط الاستواء.

Solved Problem 1.1 Assuming the Earth to be a sphere of radius 3960 mi, find the distance of a point 36°N latitude from the equator.

الحل:

$$36° = \pi/5 \text{ rad}, \; s = r\theta = 3960(\pi/5) = 2488 \text{ mi.}$$

مسألة محلولة 1.2 مدينتان تقعان على خط طول واحد والمسافة بينهما 270 ميل. أوجد الفرق فى المدى.

Solved Problem 1.2 Two cities 270 mi apart lie on the same meridian. Find their difference in latitude.

الحل:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{270}{3960} = \frac{3}{44}\text{rad} \quad \text{or} \quad 3°54.4'$$

الفصل الثانى
الدوال المثلثية للزوايا العامة
Trigonometric Functions of a General Angle

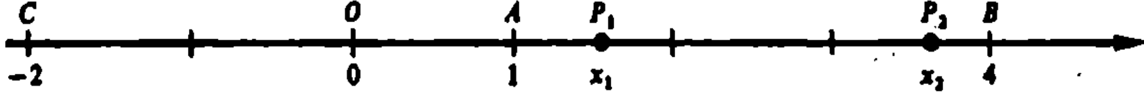
فى هذا الفصل:

- ✔ إحداثيات الخط المستقيم
- ✔ إحداثيات المستوى.
- ✔ الوضع القياسى للزوايا
- ✔ الدوال المثلثية للزوايا العامة
- ✔ الإشارات الرُبعية للدوال
- ✔ الدوال المثلثية للزوايا الربعية
- ✔ الدوال المثلثية غير المعرفة
- ✔ إحداثيات النقط التى تقع على محيط دائرة الوحدة
- ✔ الدوال الدائرية

إحداثيات الخط المستقيم Coordinates on a Line

الخط المتجه هو خط مستقيم له اتجاه موجب واتجاه آخر سالب. ويوضح الاتجاه الموجب برأس سهم وقياس الأعداد يتم على خط

الأعداد المتجه باختيار نقطة O (شكل 1-2) تسمى نقطة الأصل ووحدة القياس $OA = 1$.



شكل 1-2

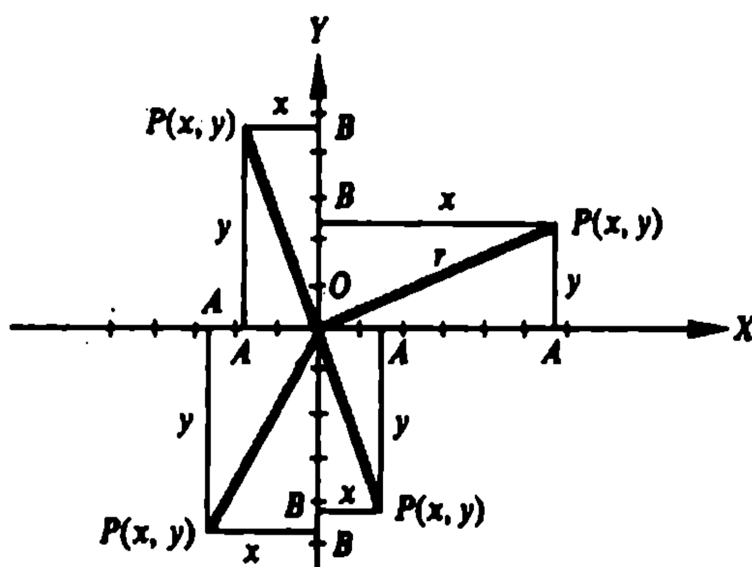


على هذا المقياس مقدار نقطة B هو 4 وحدات على يمين نقطة O (فى الاتجاه الموجب من النقطة O) ومقدار نقطة C هو 2 وحدة على شمال نقطة O (فى الاتجاه السالب من النقطة O). المسافة المباشرة $OB = +4$ والمسافة المباشرة $OC = -2$ ومن المهم جداً أن نذكر أنه فى حالة تحديد اتجاه الخط المستقيم فإن $OB \neq BO$ و $OC \neq CO$. المسافة المتجهة $BO = -4$ وتقاس عكس الاتجاه الموجب المحدد للخط المستقيم والمسافة المباشرة $CO = +2$ أى أن $CB = CO + OB = 2 + 4 = 6$ و $BC = BO + OC = -4 + (-2) = -6$.

إحداثيات المستوى Coordinates in a Plane

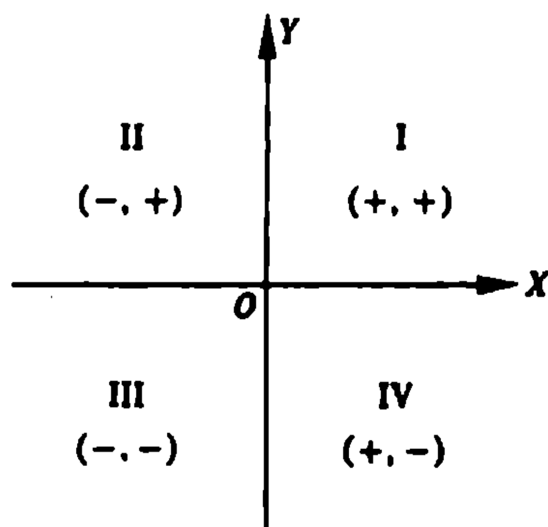
تتكون مجموعة الإحداثيات المتعامدة فى المستوى من عددين من القياس (تسمى المحاور) (axes) إحداهما أفقى والآخر رأسى ونقطة تقاطع المحورين هى نقطة الأصل (origin) لكل من الإحداثيين. ومن المعتاد أن نختار الاتجاه الموجب لكل من الإحداثيين كما هو موضح بالشكل 2-2 يكون موجبًا فى اتجاه اليمين للمحور الأفقى أو محور السينات وموجبًا لأعلى على المحور الرأسى أو محور الصادات. ومن المناسب أن نختار وحدة قياس واحدة لكل من الإحداثيين.

ويمكن تحديد أى نقطة P فى المستوى بمعلومية الإحداثيات للنقطة أى أن النقطة معلومة البعد عن المحور الإحداثى السينى لنقطة P (شكل 2-2) معلوم بالبعد $BP = OA$ والإحداثى الصادى للنقطة معلوم بالبعد $AP = OB$ وسوف نشير إلى الإحداثى السينى للنقطة والإحداثى الصادى بـ $P(x, y)$.



شكل 2-2

تقسم المحاور المستوى إلى أربعة أجزاء تسمى أرباع وترقم على الترتيب فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة I, II, III, IV. أرقام الأرباع وإشارات إحداثيات النقطة لكل قسم موضحة بشكل 2-3.



شكل 2-3

تسمى المسافة الغير متجهة r لأى نقطة $P(x, y)$ مـن نقطـة الأصـل بـالوتر (أحيانًـا تسـمى المتجـه نصـف القطـرى للنقطـة P) ويعطـى بالعلاقة:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

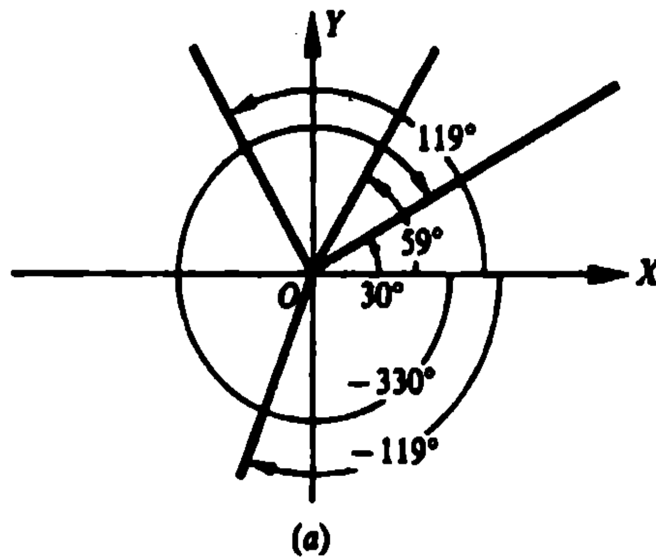
ملاحظة!

لكل نقطة فى المستوى ثلاثة أعداد: x, y, r تعينها.

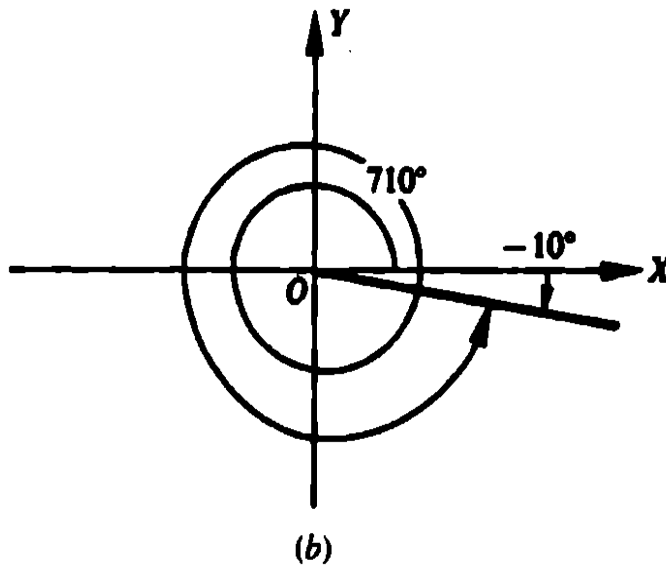
الوضع القياسى للزوايا Angles in Standard Position

بالنسبة لمجموعة الإحداثيات المتعامدة يقـال أن الزاويـة فـى الوضـع القياسى عندما يمر متجه الزاوية بنقطة الأصل ويتطابق الضلع الأساسى للزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

وتسمى الزاوية بزاوية الربـع الأول First-Quadrant Angle أو الزاويـة التى تقع فى الربع الأول عندما يكون الضلع الخارجى للزاوية يقع فـى هذا الربع وعلى سبيل المثال الزوايـا 30°، 59°، -330° هـى زوايـا الربـع الأول شكل 2-4(a)، الزاوية 119° تقع فـى الربـع الثـانى، الزاويـة -119° تقع فى الربع الثالث والزوايا -10°، 710° هى زوايا الربـع الرابـع شكـل 2-4(b).



(a)



(b)

شكل 4-2

عندما تكون زاويتان فى الوضع القياسى والضلع الخارجى لكل منهما ينطبق على الضلع الآخر يقال أن الزاويتين متطابقتان Coterminal Angles، وعلى سبيل المثال الزاوية 30°، 330°- والزاوية 10°-، 710° هى أزواج من الزوايا المتطابقة وهناك عدد غير محدود من الزوايا المتطابقة.

ومجموعة الزوايا المطابقة لأى زاوية يمكن إيجادها بإضافة مضاعفات الزاوية 360° إلى الزاوية المعلومة.

الزوايا 0°، 90°، 180°، 270° وكل الزوايا المطابقة لهم تسمى الزوايا الربعية Quadrantal Angles.

الدوال المثلثية للزوايا العامة

Trigonometric Functions of a General Angle

نفرض أن زاوية θ (زاوية ليست ربعية) فـي الوضـع القياسـى ونقطـة $P(x, y) \neq (0, 0)$ تقع على الضلع الخارجى للزاوية، فإن الدوال المثلثيـة الستة للزاوية تعرف بالإحداثى السـينى والصـادى وبعـد النقطـة P عـن نقطة الأصل كالتالى:

جيب الزاوية

$$\text{sine}\ \theta = \sin\theta = \frac{\textit{ordinate}}{\textit{hypotenuse}} = \frac{\text{الإحداثى الصادى}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{r}$$

جيب تمام الزاوية

$$\text{cosine}\ \theta = \cos\theta = \frac{\textit{abscissa}}{\textit{hypotenuse}} = \frac{\text{الإحداثى السينى}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{r}$$

ظل الزاوية

$$\text{tangent}\ \theta = \tan\theta = \frac{\textit{ordinate}}{\textit{abscissa}} = \frac{\text{الإحداثى الصادى}}{\text{الإحداثى السينى}} = \frac{y}{x}$$

ظل تمام الزاوية

$$\text{cotangent}\ \theta = \cot\theta = \frac{\textit{abscissa}}{\textit{ordinate}} = \frac{\text{لإحداثى السينى}}{\text{الإحداثى الصادى}} = \frac{x}{y}$$

قاطع الزاوية

$$\text{secant}\ \theta = \sec\theta = \frac{\textit{hypotenuse}}{\textit{abscissa}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{الإحداثى السينى}} = \frac{r}{x}$$

قاطع تمام الزاوية

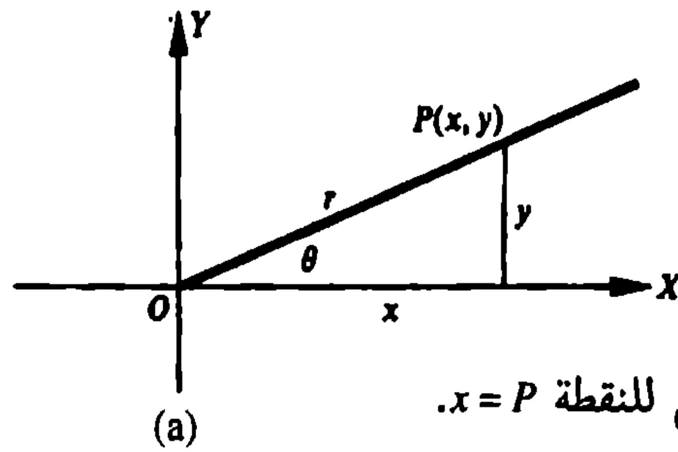
$$\text{cosecant}\ \theta = \csc\theta = \frac{\textit{hypotenuse}}{\textit{ordinate}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{الإحداثى الصادى}} = \frac{r}{y}$$

وكنتيجة طبيعيـة لـهذه النسـب المثلثيـة توجـد العلاقـات المثلثيـة التالية:

$\sin\theta = 1/\csc\theta$	$\tan\theta = 1/\cot\theta$	$\sec\theta = 1/\cos\theta$
$\cos\theta = 1/\sec\theta$	$\cot\theta = 1/\tan\theta$	$\csc\theta = 1/\sin\theta$

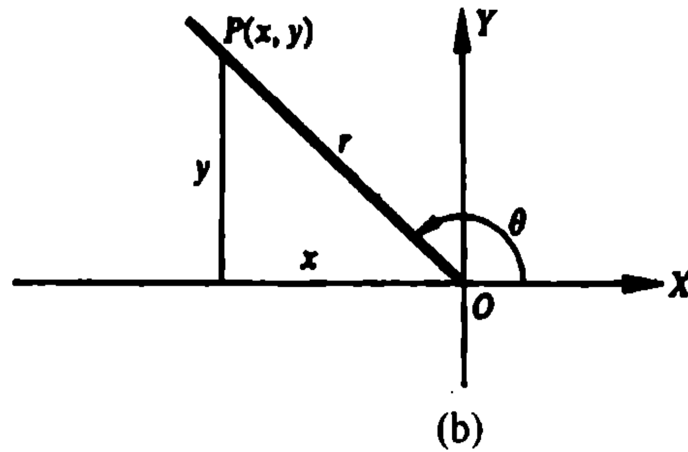
ولكل زوج من مقلوب هذه العلاقات تستخدم دالة واحـدة مـن مقلـوب الدوال المثلثية وتكون شائعة الاستعمال أكثر من الدالة الأخرى. ومـن الدوال المثلثية شائعة الاستعمال جيب وجيب تمام وظل الزاوية .

ومن الواضح من الشكل 5-2 أن الدوال المثلثية لأى زاوية θ تتغـير مع تغيير الزاوية.



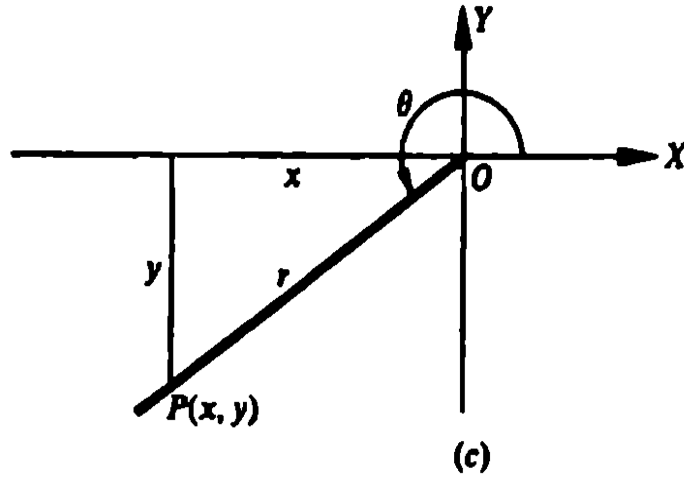
(a)

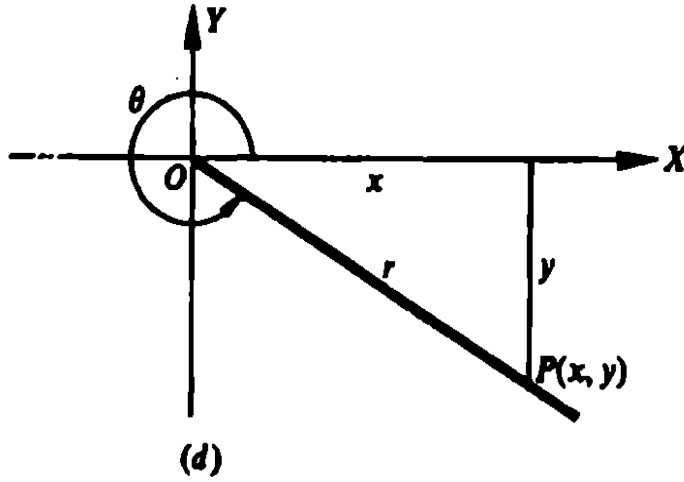
الإحداثى السينى للنقطة $P = x$.
الإحداثى الصادى للنقطة $P = y$.
بعد النقطة P عن نقطة الأصل $0 = r$.



(b)

شكل 5-2



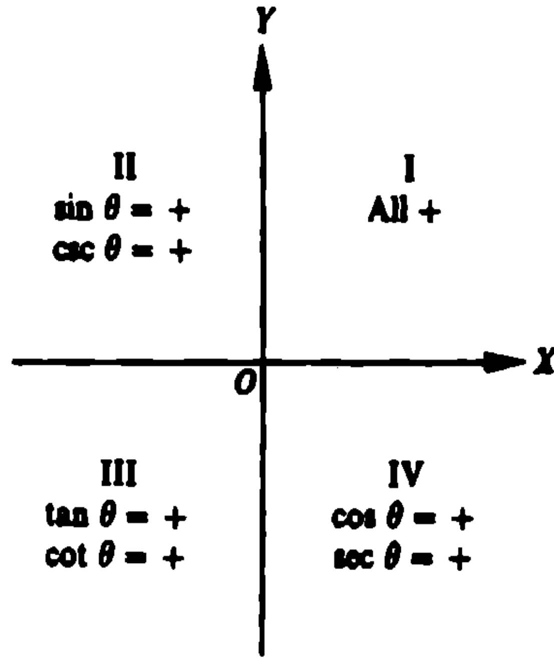


تابع شكل 2-5

الإشارات الرُبعية للدوال

Quadrant Signs of the Functions

متجه الزاوية r دائمًا يكون موجبًا وإشارة الـدوال المثلثيـة فـى أربـاع المحاور تعتمد على إشارة x و y. وتحدد إشارة الدوال المثلثية حسب الوضـع القياسـى للزاويـة أو اسـتخدام بعـض الأشكـال التـى توضـح الإشارات الموجبة للدوال المثلثية فى كل ربـع. كمـا هـو واضـح فـى شكل 6-2.

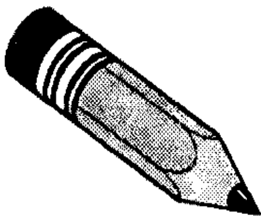


شكل 2-6

الدوال المثلثية لزاوية معلومــة تكـون وحيـدة القيمـة إلا أنـه عنـد إيجاد الزاوية لدالة مثلثية معلومة يكون الناتج عدة زوايـا تعطـى نفـس القيمة للدالة المثلثية. على سبيل المثال إذا كان: $\sin\theta = {}^{1}/_{2}$ فإن قيمة θ التى تحقــق العلاقـة هـى °30، °150، °390، °510، ... وعلـى وجـه العموم فإن هناك احتمالين لوضعى الضلع الخــارجى للزاويـة وكمثـال لذلك الضلع الخارجى للزاوية °30 والزاويـة °150. يتـم اسـتثناء هـذه القاعدة عند تحديد الربع التى تقع فيه الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا الربعية

Trigonometric Functions of Quadrantal Angles



بالنسبة للزوايا الربعية إذا تطــابق الضلـع الخـارجى للزاوية مع أحد المحاور فإن بعد النقطة P عن نقطـة الأصل على الضلع الأساسى للزاوية يكون إمـا $x = 0$ و $y \neq 0$ أو $x \neq 0$ و $y = 0$ وعلى أى حالة فإن دالتين من الدوال الستة لا يمكن تعريفهما. على سبيل المثال يتطـابق الضلـع

الخارجى للزاويـة $0°$ مـع الاتجـاه الموجـب لمحـور السـينات ويكـون الإحداثى الصادى للنقطة P مساويًا الصفر. وعلى ذلك لا يمكن تعريف الدالتين ظل تمام الزاوية cotangent وقـاطع تمـام الزاويـة cosecant لأن مقام النسبة المثلثية فى هذه الحالة يسـاوى الصفـر. وفـى هـذا الكتـاب سوف يتم استخدام التعبير أن الدالـة غـير معرفـة undefined بـدلاً مـن استخدام القيمة العددية فى مثل هذه الحالات. ولكـن بعـض المؤلفيـن يوضح ذلك بكتابة $\cot 0° = \infty$ والبعض الآ خر يكتب $\cot 0° = \pm\infty$.

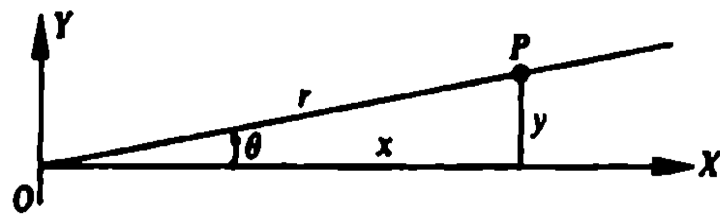
الزاوية θ	جيب الزاوية	جيب تمام الزاوية	ظل الزاوية	ظل تمام الزاوية	قاطع الزاوية	قاطع تمام الزاوية
angle θ	sin θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	1	0	غير معرفة	1	غير معرفة
90°	1	0	غير معرفة	0	غير معرفة	1
180°	0	−1	0	غير معرفة	−1	غير معرفة
270°	−1	0	غير معرفة	0	غير معرفة	−1

الدوال المثلثية غير المعرفة

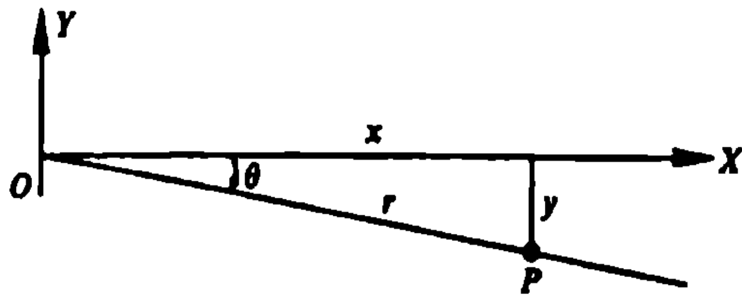
Undefined Trigonometric Functions

سبق دراسة أن النسب المثلثية $\cot 0°$، scs $0°$ غير معرفة على أساس أن القسمة على العدد صفر غير ممكنة، ولكن قيمة الدوال المثلثية للزوايا التى تقترب من الصفر جديرة بالاهتمام. وشكل 2-7(a) يوضح أن زاوية θ هى زاوية صغيرة فى الوضع القياسى وعلى الضلع الخـارجى للزاويـة توجد نقطة $P(x, y)$ على مسافة مقدارها r من نقطـة O. قيمـة x موجبـة وتقل قليلاً عن البعد r وعلى هذا الأساس فإن النسبة المثلثية $\cot \theta = x/y$، و$\csc \theta = r/y$ تصبح كبيرة القيمـة وموجبـة نفـرض أن زاويـة θ تقـل فـى اتجـاه الزاويـة 0 ولكـن مـا زال بعـد نقطـة P مـن نقطـة O هـو r.

والآن البعد x يزيد ولكنه يظل أقل مـن البعـد r بينما يقـل البعـد y ولكنه أكبر من الصفر، وهكذا فإن النسب المثلثية $\csc \theta$ و $\cot \theta$ تصبح أكبر وأكبر. ولإثبات ذلك نفـرض أن $r = 1$ ثـم احسب $\csc \theta$ عندما ($y = 0.1, 0.01, 0.001, ...$) وتوضح هذه الحالـة عنـد اقـتراب θ مـن $0^{\circ +}$ تقترب $\cot \theta$ من $+\infty$ وهذا يفسر أن $\cot 0^{\circ} = +\infty$.



(a)



(b)

شكل 2-7



الفرض التالى كما هو موضح بشكل 2-7(b) زاويـة θ هـى زاوية سالبة وتقترب من 0°. وعلى الضلع الخارجى توجـد نقطة P علي مسافة مقدارها r من نقطـة O. قيمـة x موجبـة وتقل قليلاً عن البعـد r بينمـا البعـد y سـالبًا ولـه قيمـة مطلقة صغيرة. وعلى هذا الأساس فإن النسب المثلثية $\csc \theta$، $\cot \theta$ تصبح كبيرة القيمـة المطلقـة وسـالبة الإشـارة. نفـرض أن زاوية θ تقل فى اتجاه الزاوية 0. ولكن مازال بعد نقطة P مـن نقطـة O

هو r والآن البعد x يزيد ولكنه يظل أقل من البعد r بينما يقــل البعــد y بالقيمة السالبة المطلقــة وهكــذا فــإن النســب المثلثيــة $\csc\theta$، $\cot\theta$ تصبح أكبر وأكبر بالقيمة السالبة المطلقة. وتوضح هذه الحالــة عنــد اقتراب θ من $0^{\circ-}$ تقترب $\cot\theta$ من $-\infty$ وهذا يفسر أن $\cot 0^\circ = -\infty$.

استخدام علامة = فى كل من الحالات $\cot\theta = -\infty$ و $\cot 0^\circ = \infty$ ليس له المعنى القياسى للتساوى ويجب استخدامه بحرص وخاصة أن النسب المثلثية $\cot 0^\circ$ غير معرفة وعلامة ∞ ليست عدد، ولكنها رمــز مختصــر يوضح حالة خاصة لدالة من الدوال المثلثية.

ويمكن توضيح الدوال المثلثية الأخرى غير المعرفة بطريقة بسيطة. والخريطة التالية تلخص الدوال المثلثية غير المعرفة للزوايا من 0° إلى 360°.

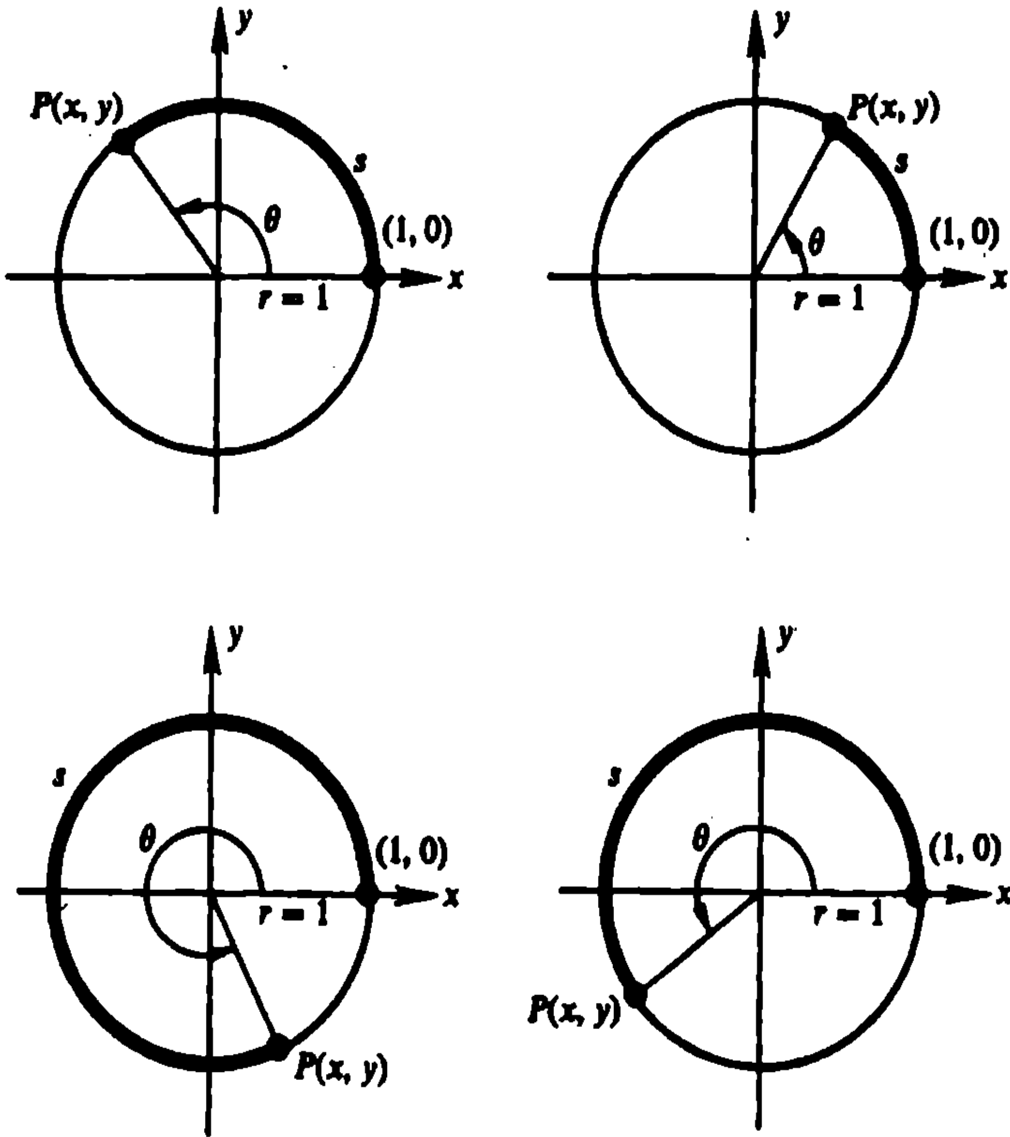
الزاوية θ Angle θ	Function Values قيمة الدالة
$\theta \to 0^{\circ+}$	$\cot\theta \to +\infty$ and $\csc\theta \to +\infty$
$\theta \to 0^{\circ-}$	$\cot\theta \to -\infty$ and $\csc\theta \to -\infty$
$\theta \to 90^{\circ-}$	$\tan\theta \to +\infty$ and $\sec\theta \to +\infty$
$\theta \to 90^{\circ+}$	$\tan\theta \to -\infty$ and $\sec\theta \to -\infty$
$\theta \to 180^{\circ-}$	$\cot\theta \to -\infty$ and $\csc\theta \to +\infty$
$\theta \to 180^{\circ+}$	$\cot\theta \to +\infty$ and $\csc\theta \to -\infty$
$\theta \to 270^{\circ-}$	$\tan\theta \to +\infty$ and $\sec\theta \to -\infty$
$\theta \to 270^{\circ+}$	$\tan\theta \to -\infty$ and $\sec\theta \to +\infty$

الإشارة الموجبة + تعنى أن القيمة العددية للنســب المثلثيــة أكبــر مــن العدد الموضح للنسبة المثلثية، والزاوية $180^{\circ+}$ تعنى أن الزاوية أكبر من 180°. الإشارة السالبة - تعنى أن القيمة العددية للنسبة أقل من العــدد الموضح للنسبة المثلثية، $90^{\circ-}$ تعنى أن الزاوية أقل من 90°.

إحداثيات النقط التى تقع على محيط دائرة الوحدة

Coordinates of Points on a Unit Circle

نفرض أن s هو طول قوس على دائـرة الوحـدة $x^2 + y^2 = 1$ وكـل قـوس طوله s معرف بزاوية نصف قطرية θ. وعند استخدام النقطة (1,0) كنقطة بداية للقوس s ونقطة $P(x, y)$ كنقطة نهاية للقوس كما هو موضح بشكل (2-8) يمكن تحديد إحداثيات النقطة P بدلالة العدد الحقيقى s.



شكل 2-8

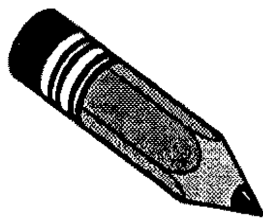
النسب المثلثية لأى زاوية على دائرة الوحدة $\cos \theta = x/r$ و $\sin \theta = y/r$ حيث أن $r = 1$ وطول القوس $s = r\theta = \theta$ والنسب المثلثية $\cos \theta = \cos s = x/1 = x$ و $\sin \theta = \sin s = y/1 = y$. ويمكن تحديد النقطة P التى تنتمى إلى طول القوس s بواسطة $P(x, y) = P(\cos s, \sin s)$. ويمكن كتابة العلاقة بين الدالة المحيطية W وهى تشمل الأعداد الحقيقية لطول القوس s ونقطة P على محيط دائرة الوحدة بالصورة التالية

$$W(s) = (\cos s, \sin s)$$

توجد علاقة بين أطوال بعض الأقواس والنقط التى تقع على محيط دائرة الوحدة ويمكن تحديدها بسهولة. عندما تكون $s = 0$ فإن النقطة هى $(1,0)$ وعندما تكون $s = \pi/2$ أى أن s = ربع محيط دائرة الوحدة. تصبح النقطة هى $(0,1)$ وعند $s = \pi$ تصبح النقطة هى $(-1,0)$ وطول المحيط $s = 3\pi/2$ ومرتبط بالنقطة $(0,-1)$ وهذه القيم موضحة بالجدول الآتى:

s	$P(x, y)$	$\cos s$	$\sin s$
0	(1, 0)	1	0
$\pi/2$	(0, 1)	0	1
π	(−1, 0)	−1	0
$3\pi/2$	(0, −1)	0	−1

الدوال الدائرية Circular Functions



لكل طول قوس s زوج من الدوال المثلثية $\cos s, \sin s$ على دائرة الوحدة. وكل من $\cos s$، s أعداد حقيقية وتعرف بالدالة $(s, \cos s)$ وتسمى الدالة الدائرية لجيب تمام الزاوية. ومن ناحية أخرى فإن كل من $s, \sin s$ أعداد حقيقية وتعرف بالدالة $(s, \sin s)$ وتسمى الدالة الدائرية لجيب الزاوية. وهذه الدوال تسمى الدوال الدائرية حيث أن كل من $\cos s, \sin s$ هى إحداثيات لدائرة الوحدة.

وتتشابه الدوال الدائرية $\sin s, \cos s$ مع الدوال المثلثية $\cos \theta$ و$\sin \theta$ حيث أنه يمكن تحويل أى زاوية من التقدير الستينى إلى التقدير الدائرى وهذا القياس الدائرى للزاوية النصف قطرية مرتبط بطول القوس s على دائرة الوحدة. ومن المميزات الهامة للدوال الدائرية $(s, \cos s)$ و$(s, \sin s)$ أن لها زوجًا من القيم الحقيقية وكل الخواص والخطوات للدوال ذات القيم الحقيقية تنطبق على الدوال الدائرية.

ويمكن تعريف كل من الدوال الدائرية الأخرى بدلالة $\sin s$ و $\cos s$.

$$\tan s = \frac{\sin s}{\cos s} \qquad \text{for } s \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$ حيث أن k عدد صحيح

$$\cot s = \frac{\cos s}{\sin s} \qquad \text{for } s \neq k\pi$$ حيث أن k عدد صحيح

$$\sec s = \frac{1}{\cos s} \qquad \text{for } s \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$ حيث أن k عدد صحيح

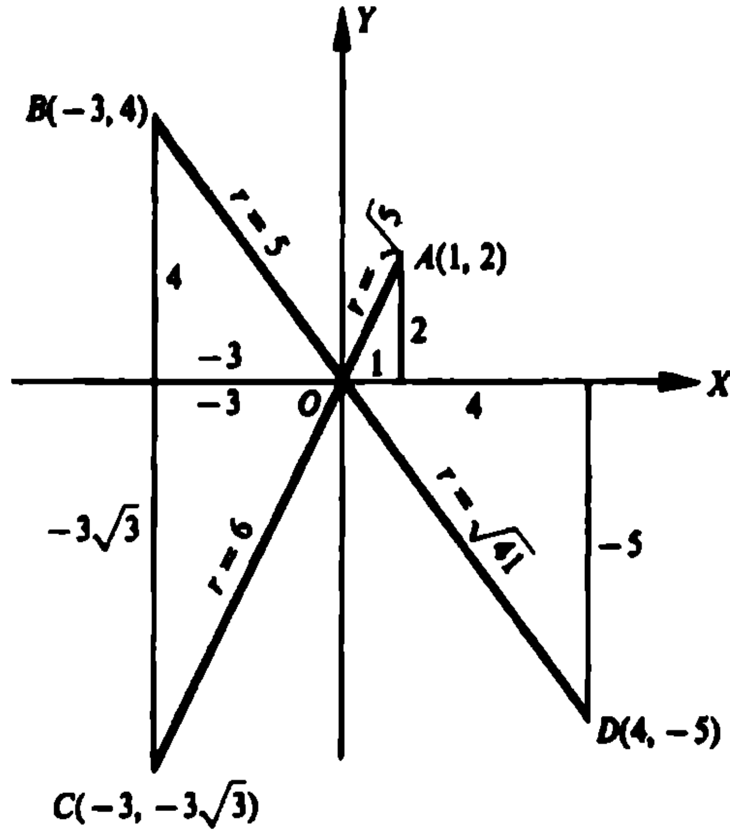
$$\csc s = \frac{1}{\sin s} \qquad \text{for } s \neq k\pi$$ حيث أن k عدد صحيح

تكون الدوال الدائرية معرفة حيثما تكون الدوال المثلثية معرفة، وتكون قيمة مجال الدالة مناظرة للقيمة التى تكون عندها الدوال المثلثية غير معرفة.

وليس من الضرورى فى أى تطبيق أن نميز بين الدوال المثلثية للزوايا النصف قطرية والدوال الدائرية للأعداد الحقيقية.

مسألة محلولة 2-1 استخدم مجموعة الإحداثيات المتعامدة لتحديد النقاط الآتية ثم أوجد قيمة r لكل منها: $A(1, 2)$، $B(-3, 4)$، $C(-3, -3\sqrt{3})$، $D(4, -5)$. كما هو موضح بشكل 9-2.

Solved Problem 2.1 Using a rectangular coordinate system, locate the following points and find the value of r for each: $A(1, 2)$; $B(-3, 4)$; $C(-3, -3\sqrt{3})$; $D(4, -5)$ as shown in Figure 2-9.



شكل 2-9

الحل:

For A: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ البعد r بالنسبة لنقطة A

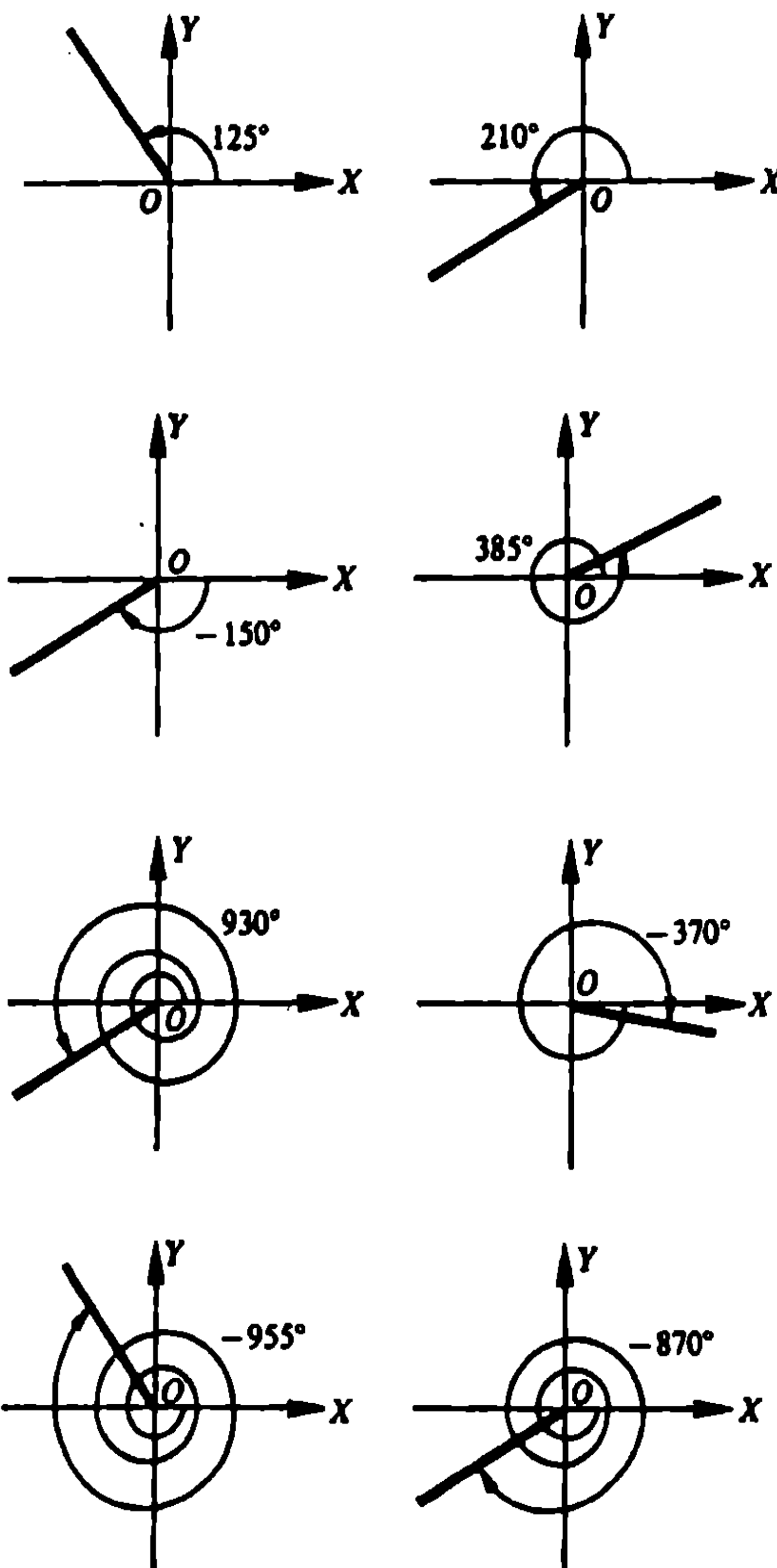
For B: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9+16} = 5$ البعد r بالنسبة لنقطة B

For C: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9+27} = 6$ البعد r بالنسبة لنقطة C

For D: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$ البعد r بالنسبة لنقطة D

مسألة محلولة 2-2 وضح بالرسم الوضع القياسى لكل من الزوايا الآتية ومن الرسم أوجد كل من الزوايا المتطابقة 125°، 210°، 15°−، 385°، 930°، 370°−، 955°−، 870°−. كما هو موضح بشكل 10-2.

Solved Problem 2.2 Construct the following angles in standard position and determine those which are coterminal: 125°, 210°, −150°, 385°, 930°, −370°, −955°, and −870°, as shown in Figure 2-10.



شكل 2-10

الحل: شكل 10-2 يوضح الزوايا المطلوبة فـى الوضـع القياسـى. ومـن الرسم نجد أن: الزاوية 125° مطابقة للزاوية 955°- حيث أن:

أو بصـــورة أخـرى. $-955° = 125 - 3 . 360°$ $125° = -955° + 3 . 360°$ $360°$

والزوايـا °210، °150-، °930، °870 هـى زوايـا متطابقـة حيـث أن:

$-150° = 210° - 1 . 360°$؛ $930° = 210° + 2 . 360°$ و $-870° = 210° - 3 . 360°$

ومن الشكل 10-2 نجد أن هناك زاوية فى الربع الأول °385 وزاوية فـى الربع الرابع وهى °370- وهما زاويتان لا يتطابقان مع الزوايا الأخرى.

مسألة محلولة 3-2 فى أى ربع تقع زاوية θ فى كل من الحالات الآتية: (*a*) عندما يكون جيب الزاوية موجبًا؟ (*b*) عندما يكون جيب تمام الزاوية سالبًا؟ (*c*) عندما يكون ظل الزاوية سالبًا؟ (*d*) عندما يكون قاطع الزاوية موجبًا؟

Solved Problem 2-3 In what quadrants may θ terminate, if: (*a*) $\sin \theta$ is positive?; (*b*) $\cos \theta$ is negative?; (*c*) $\tan \theta$ is negative?; (*d*) $\sec \theta$ is positive?

الحل:

(*a*) حيث أن النسبة المثلثية $\sin \theta$ موجبة، فإن قيمة y موجبة وقيمة x تكون إما سالبة أو موجبة. وحسب قيمة y فإن الزاوية تقع فى الربع الأول أو الثانى.

(*b*) حيث أن النسبة المثلثية $\cos \theta$ سالبة، فإن قيمة x سالبة وقيمة y تكون إما سالبة أو موجبة. وحسب قيمة x فإن الزاوية تقع فى الربع الثانى أو الثالث.

(*c*) حيث أن النسبة المثلثية $\tan \theta$ سالبة، فإن قيمة x تكون سالبة وقيمة y موجبة أو العكس أى أن قيمة x تكون موجبة وقيمة y سالبة ولذلك فإن الزاوية تقع فى الربع الثانى أو الربع الرابع.

(*d*) حيث أن النسبة المثلثية $\sec \theta$ موجبة فإن قيمة x تكون موجبة وحسب قيمة x الموجبة فإن الزاوية تقع فى الربع الأول أو الربع الرابع.

الفصل الثالث

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

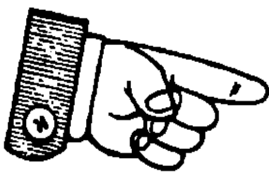
Trigonometric Functions of an Acute Angle

فى هذا الفصل:

- ✔ الدوال المثلثية للزاوية الحادة
- ✔ الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين
- ✔ الدوال المثلثية للزوايا الخاصة °30، °45 و °60
- ✔ قيم الدوال المثلثية
- ✔ دقة النتائج باستخدام عمليات التقريب
- ✔ اختيار الدوال فى حلول المسائل
- ✔ زوايا الارتفاع والانخفاض

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

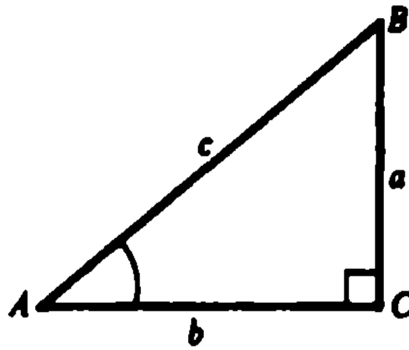
Trigonometric Functions of an Acute Angle



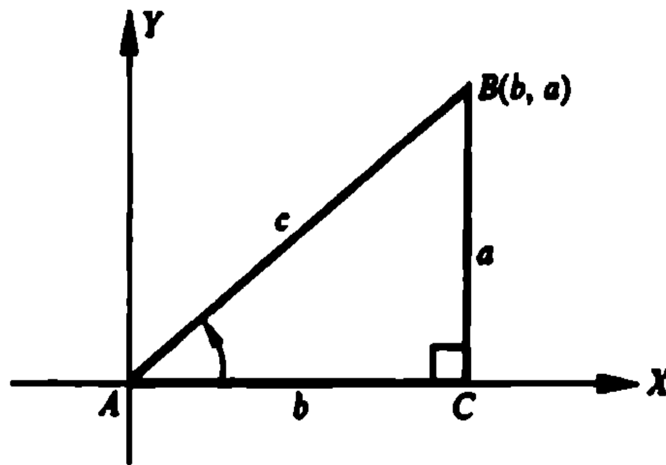
عند التعامل مع أى مثلث قائم الزاوية من المناسب تعريف المثلث برؤوسه الثلاثة A، B و C كما هو واضح من الشكل 1-3 وزاوية C هى رأس القائمة.

وزوايا المثلث هى A، B و C والزاوية $C = 90°$ وأضلاع المثلث التى تقابل هذه الزوايا هى a، b و c على الترتيب.

بالنسبة لزاوية A فإن الضلع المقابل للزاوية هو الضلع a والضلع المجاور للزاوية هو الضلع b، وبالنسبة لزاوية B فإن الضلع المقابل للزاوية هو الضلع b والضلع المجاور للزاوية هو الضلع a ويسمى الضلع c دائمًا بالوتر.



شكل 3-1



شكل 3-2

وإذا تم تمثيل المثلث القائم على المحاور المتعامدة كما هو واضح من شكل 3-2 فإن زاوية A تكون فى الوضع القياسى، ونقطة B تقع على الضلع الخارجى للزاوية A وإحداثياتها النقطة B هى (b, a) والمسافة c هى: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

ولذلك يمكن تعريف النسب المثلثية لزاوية A بدلالة أضلاع المثلث القائم الزاوية كما يأتى:

$$\sin A = \frac{\textit{opposite side}}{\textit{hypotenuse}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\textit{adjacent side}}{\textit{hypotenuse}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\textit{opposite side}}{\textit{adjacent side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot A = \frac{\textit{adjacent side}}{\textit{opposite side}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{\textit{hypotenuse}}{\textit{adjacent side}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{c}{b}$$

$$\csc A = \frac{\textit{hypotenuse}}{\textit{opposite side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{c}{a}$$

الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين

Trigonometric Functions of Complementary Angles

الزوايا الحادة للمثلث القائم الزاوية ABC هى زوايا متتامة حيث أن $A + B = 90°$ ومن شكل 1-3 نجد أن:

$\sin B = b/c = \cos A$　　　$\cos B = a/c = \sin A$

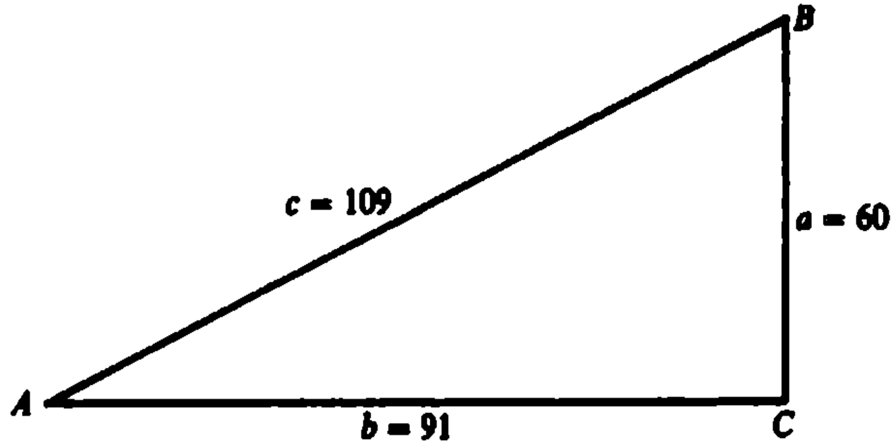
$\tan B = b/a = \cot A$　　　$\cot B = a/b = \tan A$

$\sec B = c/a = \csc A$　　　$\csc B = c/b = \sec A$

وتمثل هذه العلاقات أزواج من الـدوال المثلثيـة ـ الجيـب sin وجيـب التمام cos، الظل tan وظل التمام cot، والقاطع sec وقاطع التمام csc وكل دالة من أزواج هذه الدوال تسمى الدالة المرافقة للدالة الأخـرى. ولذلك فإن أى دالة لزاوية حادة تساوى الدالة المرافقة لتمام هذه الزاوية.

مثال 3.1 أوجد قيم الدوال المثلثية لزوايا المثلث القائم الزاويـة *ABC* الموضح بشكل 3-3.

Example 3.1 Find the values of the trigonometric functions of the angles of the right triangle *ABC* in Figure 3-3.



شكل 3-3

$$\sin A = \frac{\textit{opposite side}}{\textit{hypotenuse}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\cos A = \frac{\textit{adjacent side}}{\textit{hypotenuse}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\tan A = \frac{\textit{opposite side}}{\textit{adjacent side}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\cot A = \frac{\textit{adjacent side}}{\textit{opposite side}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\sec A = \frac{hypotenuse}{adjacent\ side} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

$$\csc A = \frac{hypotenuse}{opposite\ side} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

$$\sin B = \frac{opposite\ side}{hypotenuse} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\cos B = \frac{adjacent\ side}{hypotenuse} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\tan B = \frac{opposite\ side}{adjacent\ side} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\cot B = \frac{adjacent\ side}{opposite\ side} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\sec B = \frac{hypotenuse}{adjacent\ side} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

$$\csc B = \frac{hypotenuse}{opposite\ side} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

الدوال المثلثية للزوايا الخاصة °30، °45 و°60

Trigonometric Functions of 30°, 45° and 60°

يمكن حساب النسب المثلثية للزوايا الحادة الخاصة °30، °45 و °60 بدقة تامة. وكل كسر مقامه عدد غير نسبى نذكر فقط مكافئ الكسر ومقامه عدد نسبى كما هو موضح بالجدول.

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Trigonometric Function Values قيم الدوال المثلثية

فى تطبيقات عديدة لمسائل الدوال المثلثية نحتاج إلى النسب المثلثية لزوايا عديدة لا تشمل الزوايا الخاصة المعروفة. ويمكن إيجاد النسب المثلثية لهذه الزوايا المطلوبة باستخدام جداول النسب المثلثية أو باستخدام الآلة الحاسبة. والجدول الآتى يوضح قيم الدوال المثلثية مقربًا إلى رقمين عشريين.

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
15°	0.26	0.97	0.27	3.73	1.04	3.86
20°	0.34	0.94	0.36	2.75	1.06	2.92
30°	0.50	0.87	0.58	1.73	1.15	2.00
40°	0.64	0.77	0.84	1.19	1.31	1.56
45°	0.71	0.71	1.00	1.00	1.41	1.41
50°	0.77	0.64	1.19	0.84	1.56	1.31
60°	0.87	0.50	1.73	0.58	2.00	1.15
70°	0.94	0.34	2.75	0.36	2.92	1.06
75°	0.97	0.26	3.73	0.27	3.86	1.04

عند استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد قيم الدوال المثلثية يجب التأكد من اتباع التعليمات الموجودة بدليل الآلة وعمومًا يجب اتباع الخطوات الآتية (1) يجب التأكد من أن نظام الدرجة degree mode هو النظام المستخدم بالآلة، (2) أدخل عدد درجات الزاوية المطلوبة للحاسبة، (3) اضغط على مفتاح النسبة المثلثية المطلوبة فى الحاسبة، (4) اقرأ قيمة الدالة المطلوبة على شاشة الحاسب.

مثال 3.2 باستخدام الآلة الحاسبة أوجد النسبة المثلثية tan 15°.

Example 3.2: Find tan 15° using a calculator.

الحل: مع استخدام الآلة الحاسبة فى نظام الدرجة degree mode أدخل العدد 15 ثم اضغط مفتاح (tan). وسوف يظهر الرقم 0.267949 على الشاشة ولذلك فإن $\tan 15° = 0.267949$. وعدد الخانات التى تظهر على الشاشة تعتمد على نوع الحاسب المستخدم ويجب استخدام حاسبات لا تقل عن ستة خانات.

وتستخدم الحاسبات لإيجاد قيمة الزاوية الحادة بمعلومية الدوال المثلثية للزاوية المطلوبة. وذلك باستخدام المفتاح العكسى (inv)key أو مفتاح الدالة الثانية (2d) key. ويتم إدخال قيمة الدالة ونضغط المفتاح العكسى (inv)key الموجود بالحاسب، ثم نضغط مفتاح الدالة المثلثية للزاوية المطلوبة. ويستخدم نظام الدرجة للحاسبة لنحصل على الناتج بقياس الدرجات.

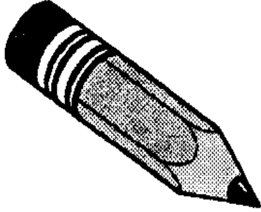
دقة النتائج باستخدام عمليات التقريب

Accuracy of Results Using Approximations

عند استخدام الأعداد التقريبية يجب تقريب النتائج وفى هذا الفصل سوف نقرب الزوايا إلى أقرب درجة وأطوال الأضلاع إلى أقرب وحدة طول. وعندما تشمل حلول بعض المسائل القيم المتوسطة ننتظر حتى إيجاد الناتج النهائى ثم نقوم بعملية التقريب للناتج. وكل قيمة متوسطة يجب أن تزيد على الأقل خانة واحدة عن الناتج النهائى المطلوب ولذلك فإن كل عملية تقريب لا تشمل مباشرة الدقة المطلوبة للنتائج.

اختيار الدوال فى حلول المسائل

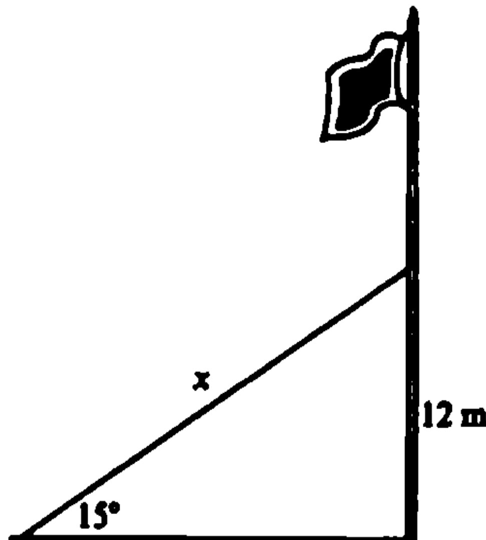
Selecting the Function in Problem Solving



عند إيجاد ضلع من أضلاع المثلث القـائم الزاويـة بمعلومية ضلع وزاوية من المثلـث، يمكـن اسـتخدام نوعين من الدوال المثلثية لحل المثلث وهـى عبـارة عن دالة ومقلوبها. وعند حل المسألة يجب اختيار الدالة المثلثية بحيث يكون الضلع المجـهول هـو البسـط لكسـر الدالـة. ويتم هذا الاختيار على أساس أفضلية استخدام عمليـات الضـرب فـى الحـل عـن عمليـات القسـمة. وعنـد اسـتخدام الحاسـبة فـإن الـدوال المستخدمة هى جيب الزاوية، جيب تمام الزاوية وظـل الزاويـة حيـث أن هذه الدوال المثلثية ممثلة بمفاتيح فى الحاسبات.

مثال 3.3 علم مثبت على بعد 12 متر من قاعدة العلم باسـتخدام سـلك تثبيت يصنع زاوية مقدارها 15° مع المستوى الأفقى للأرض. كمـا هـو موضح بشكل 3-4. أوجد طول السلك؟

Example 3.3 A support wire is anchored 12 m up from the base of a flagpole and the wire makes a 15° angle with the ground, as shown in Figure 3-4. How long is the wire?



شكل 3-4

الحل: من الشكل 3-4 نجد أن كل من الدوال المثلثية المطلوبة sin 15° و csc 15° تشمل طول الضلع المعلوم 12 متر وطول الضلع المطلوب إيجاده x. ويمكن استخدام أى من الدالتين لحل المسألة. واستخدام جداول حساب المثلثات أسهل من استخدام الحاسبات فى حل هذا النوع من المسائل باستخدام csc 15°، ولكن ليست كل الجداول الرياضية تشمل النسب المثلثية للقاطع secant أو قاطع التمام cosecant وعند استخدام الحاسبات نستخدم الدالة المثلثية لجيب الزاوية sin 15° لأنه لا يوجد مفتاح للدالة يمثل قاطع التمام cosecant للزاوية.

الحل التقليدى Manual Solution			الحل باستخدام الحاسبات Calculator Solution
$\csc 15° = \frac{x}{12}$	or	$\sin 15° = \frac{12}{x}$	$\sin 15° = \frac{12}{x}$
$x = 12 \csc 15°$		$x = \frac{12}{\sin 15°}$	$x = \frac{12}{\sin 15°}$
$x = 12(3.86)$		$x = \frac{12}{0.26}$	$x = \frac{12}{0.258819}$
$x = 46.32$		$x = 46.15$	$x = 46.3644$
$x = 46$ m		$x = 46$ m	$x = 46$ m

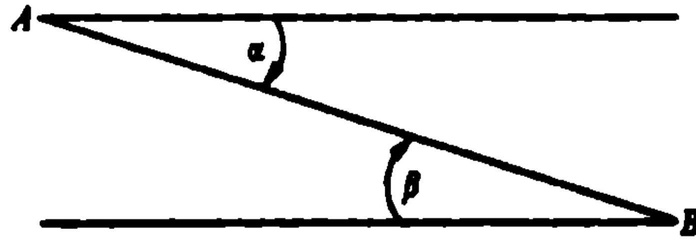
طول السلك المطلوب هو 46 متر.

زوايا الارتفاع والانخفاض

Angles of Depression and Elevation

زاوية الانخفاض هى الزاوية المحصورة بين المستوى الأفقى ومستوى النظر إلى أسفل نحو الهدف. وزاوية الارتفاع هى الزاوية المحصورة بين المستوى الأفقى ومستوى النظر إلى أعلى نحو الهدف.

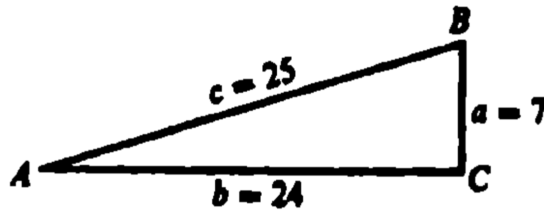
فى شكل 3-5 زاوية الانخفاض من النقطة A إلى النقطة B هى زاوية α وزاوية الارتفاع من النقطة B إلى النقطة A هى زاوية β. وكل من زاوية الارتفاع والانخفاض مقاسة بالنسبة للمستوى الأفقى وهما خطان متوازيان وفى جهتين مختلفتين من القاطع AB ولذلك فهما زاويتان متساويتان؛ أى أن $\alpha = \beta$.



شكل 3-5

مسألة محلولة 3.1 أوجد الدوال المثلثية للزوايا الحادة للمثلث القائم الزاوية ABC كما هو موضح بشكل 3-6، بمعلومية أطوال ضلعين $b = 24$ و $c = 25$.

Solved Problem 3.1 Find the trigonometric functions of the acute angles of the right triangle ABC, Figure 3-6, given $b = 24$ and $c = 25$.



شكل 3-6

الحل: بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$a^2 = c^2 - b^2 = (25)^2 - (24)^2 = 49, \; a = 7$$

الدوال المثلثية للزاوية A هى:

$$\sin A = \frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c} = \frac{7}{25}$$

$$\cos A = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c} = \frac{24}{25}$$

$$\tan A = \frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{a}{b} = \frac{7}{24}$$

$$\cot A = \frac{\text{adjacent side}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{b}{a} = \frac{24}{7}$$

$$\sec A = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{adjacent side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{c}{b} = \frac{25}{24}$$

$$\csc A = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{opposite side}} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{c}{a} = \frac{25}{7}$$

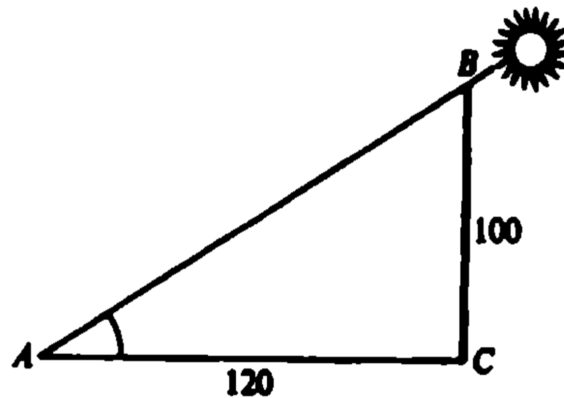
وبالمثل زاوية B:

$\sin B = 24/25$ $\quad\cos B = 7/25$ $\quad\tan B = 24/7$

$\csc B = 25/24$ $\quad\sec B = 25/7$ $\quad\cot B = 7/24$

مسألة محلولة 3.2 شجرة طولها 100 قدم تصنـع ظـلاً طولـه 120 قـدم كما هو موضح بشكل 3-7. أوجد زاوية الارتفاع للشمس.

Solved Problem 3.2 A tree 100 ft tall casts a shadow 120 ft long, as shown in Figure 3-7. Find the angle of elevation of the sun.



شكل 3-7

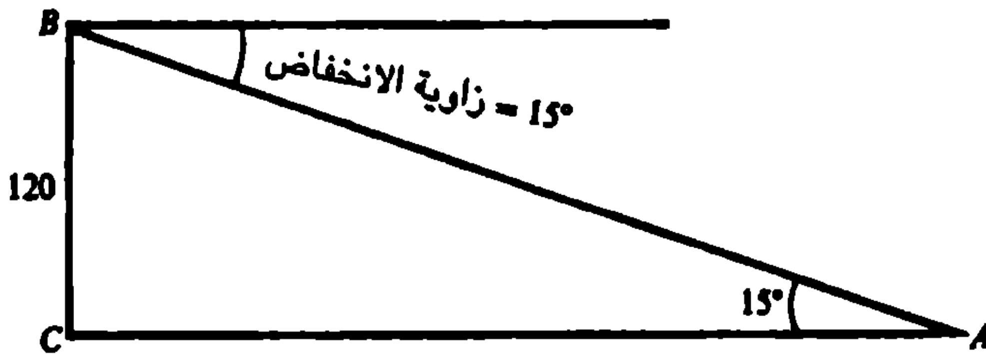
الحل: من الشكل 3-7 $CB = 100$ ft، $AC = 120$ ft والمطلوب إيجاد زاوية A

$$\tan A = \frac{CB}{AC} = \frac{100}{120} = 0.83$$

$$A = 40°$$

مسألة محلولة 3.3 من قمة فنار ارتفاعه 120 متر عن سطح البحر كانت زاوية الانخفاض لقارب هي °15 كما هو بشكل 3-8. كم يبعد القارب عن الفنار؟

Solved Problem 3.3 From the top of a lighthouse, 120 m above the sea, the angle of depression of a boat is 15°, as shown in Figure 3-8. How far is the boat from the lighthouse?



شكل 3-8

الحل: من المعلوم فى المثلث القائم الزاوية الموضح بشكل 3-8، $A = 15°$، $CB = 120$ m، فإن خطوات الحل كالتالى:

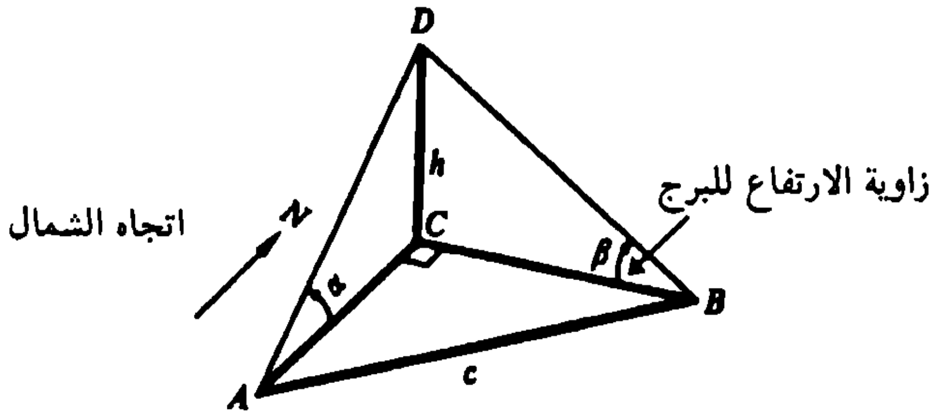
$$\cot A = AC/CB$$

$$AC = CB \cot A = 120 \cot 15° = 120(3.73) = 447.6 \text{ m}$$

يبعد القارب 447.6 متر عن الفنار.

مسألة محلولة 3.4 أنشأ برج على مستوى سطح الأرض شمالاً من نقطة A وغربًا من نقطة B، فإذا كان البعد بين النقطتين A، B هو c قدم. وإذا كانت زاويتا ارتفاع البرج المقاسة من نقطتين A، B هما α، β على الترتيب. أوجد ارتفاع البرج h كما هو موضح بشكل 9-3.

Solved Problem 3.4 A tower standing on level ground is due north of point A and due west of point B, a distance c ft from A. If the angles of elevation of the top of the tower as measured from A and B are α and β, respectively, find the height h of the tower, as shown in Figure 3-9.



شكل 9-3

الحل: فى المثلث القائم الزاوية ACD كما هو موضح بشكل 9-3 $\cot\alpha = AC/h$ وفى المثلث القائم الزاوية BCD. $\cot\beta = BC/h$. ومن العلاقتين المثلثيتين نجد أن: $AC = h\cot\alpha$ و $BC = h\cot\beta$.

ومن المثلث القائم الزاوية ABC نجد أن: $(AC)^2 + (BC)^2 = c^2$ وبالتعويض عن قيمة AC, BC

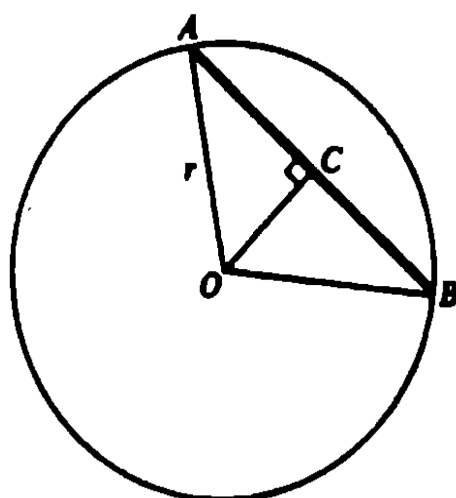
$$h^2(\cot\alpha)^2 + h^2(\cot\beta)^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad h^2((\cot\alpha)^2 + (\cot\beta)^2) = c^2$$

ارتفاع البرج المطلوب:

$$h = \frac{c}{\sqrt{(\cot\alpha)^2 + (\cot\beta)^2}}$$

مسألة محلولة 3.5 تم توزيع فتحات بانتظام على محيط دائرة فإذا كانت المسافة بين مركزى فتحتين متتاليتين معطاة بالعلاقة الآتية $d = 2r \sin (180°/n)$ حيث أن r هو نصف قطر الدائرة، n هو عدد الفتحات الموزعة على محيط الدائرة. أوجد المسافة d عندما تكون $r = 20$ in و $n = 4$.

Solved Problem 3.5 If holes are to be spaced regularly on a circle, show that the distance d between the centers of two successive holes is given by $d = 2r \sin (180°/n)$, where r = the radius of the circle and n = the number of holes. Find d when $r = 20$ in and $n = 4$.



شكل 3-10

الحل: كما هو موضح بشكل 3-10 نفرض أن A و B هما مركزا الفتحتين المتتاليتين على محيط دائرة نصف قطرها r ومركزها O. ونفرض أن منصف زاوية الرأس O للمثلث AOB ينصف الوتر AB وعمودى عليه أى أن المثلث AOC قائم الزاوية فى C.

$$\sin \angle AOC = \frac{AC}{r} = \frac{d/2}{r} = \frac{d}{2r}$$

بضرب الطرفين فى الوسطين:

$$d = 2r \sin \angle AOC$$

$$= 2r \sin \frac{1}{2} \angle AOB$$

$$= 2r \sin \frac{1}{2}\left(\frac{360^o}{n}\right)$$

$$= 2r \sin \frac{180^o}{n}$$

حيث أن:

$r = 20$ and $n = 4$, $d = 2 \cdot 20 \sin 45° = 2 \cdot 20\left(\sqrt{2}/2\right) = 20\sqrt{2}$

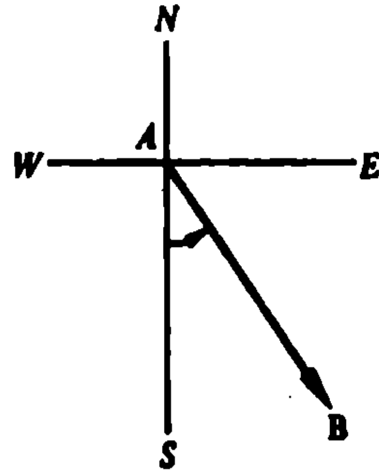
الفصل الرابع
تطبيقات عملية
Practical Applications

فى هذا الفصل:

- ✔ الاتجاه الزاوى
- ✔ المتجهات
- ✔ جمع المتجهات
- ✔ مركبات المتجه
- ✔ الملاحة الجوية
- ✔ المستوى المائل

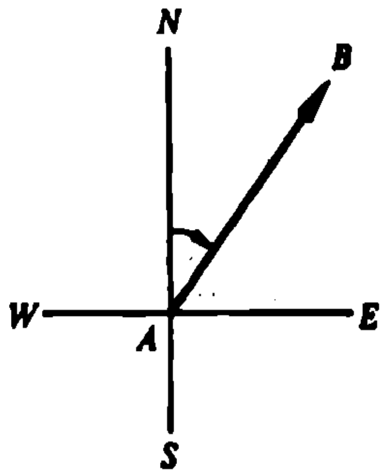
الاتجاه الزاوى — Bearing

يعرف الاتجاه الزاوى لنقطة *B* من نقطة *A* فى مستوى أفقى بأنه الزاوية (وهى دائمًا زاوية حادة) التى يصنعها الشعاع المرسوم من نقطة *A* إلى نقطة *B* مع الاتجاه الشمالى الجنوبى المار بنقطة *A*. ويقرأ الاتجاه الزاوى من اتجاه الشمال أو الجنوب تجاه الشرق أو الغرب. وتكون الزاوية التى تعبر عن الاتجاه الزاوى مقدرة بالدرجات والدقائق. على سبيل المثال انظر شكل 1-4.



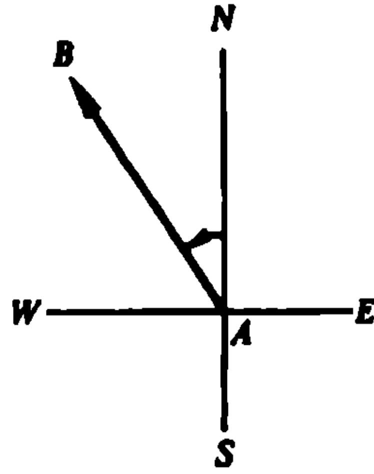
S35°E

اتجاه زاوى 35° اتجاه جنوب الشرق



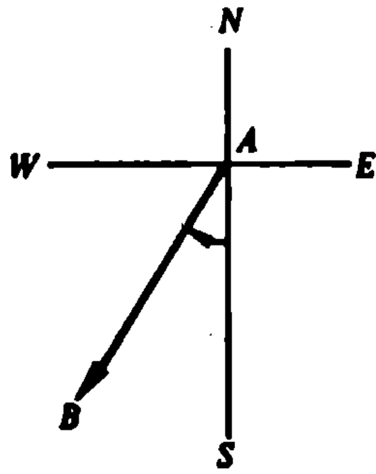
N35°E

اتجاه زاوى 35° اتجاه شمال الشرق



N35°W

اتجاه زاوى 35° اتجاه شمال الغرب

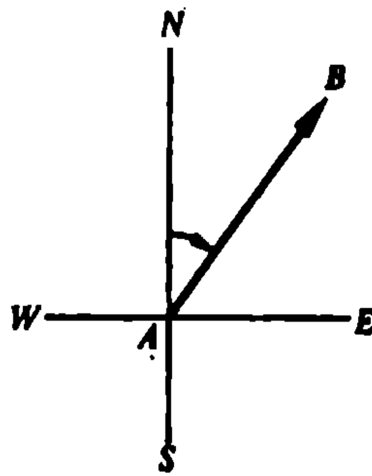


S35°W

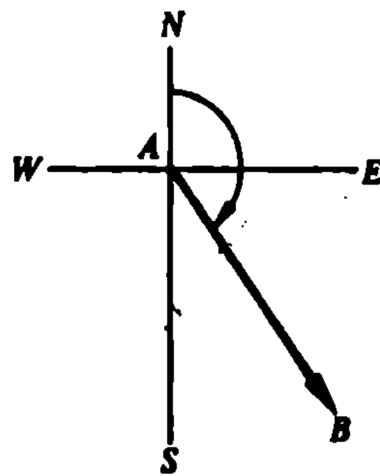
اتجاه زاوى 35° اتجاه جنوب الغرب

شكل 4-1

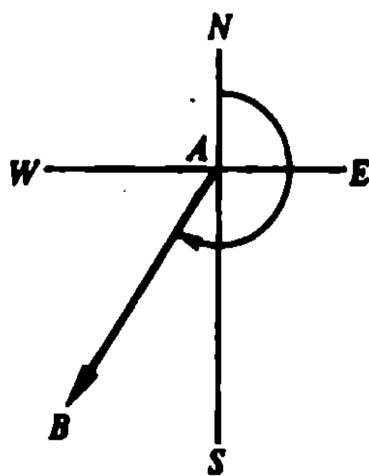
من الشائع فى علوم الطيران استخدام تعبير الاتجاه الزاوى Bearing للنقطة B من النقطة A بدلاً من اتجاه الشعاع AB عن خط الشمال من خلال نقطة A مقاسة فى اتجاه دوران عقارب الساعة من اتجاه الشمال (هذا يعنى من اتجاه الشمال إلى اتجاه الشرق) على سبيل المثال انظر شكل 4-2.



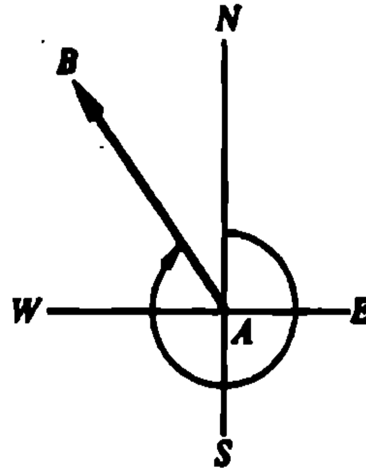
اتجاه زاوى 35°



اتجاه زاوى 145°



اتجاه زاوى 215°



اتجاه زاوى 325°

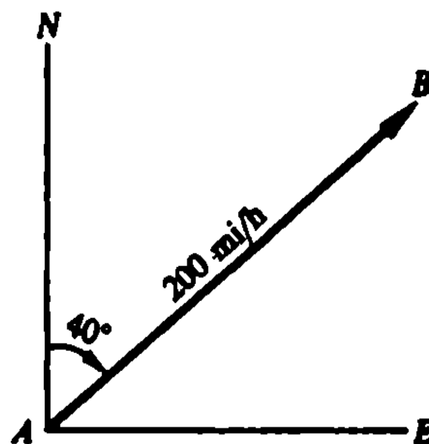
شكل 2-4

المتجهات Vectors

الكميات المتجهة Vector Quantity هى كميات طبيعية لها مقدار واتجاه مثل القوة أو السرعة. ويمكن تمثيل الكميات المتجهة بقطعـة مسـتقيمة (سهم) تسمى المتجه. واتجاه المتجه هو الكمية المعطاة وطول المتجه يتناسب مع مقدار هذه الكمية.

مثال 4.1 طائرة تطير بسرعة 200 ميل/ساعة فى اتجـاه زاوى 40° شمـال الشرق. المتجه AB يمثل السرعة. كما هو واضح من شكل 3-4.

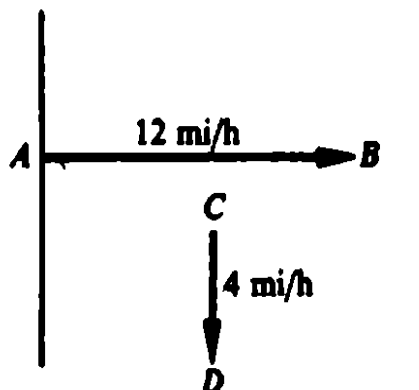
Example 4.1 An airplane is traveling N40°E at 200 mi/h. Its velocity is represented by the vector **AB** in Figure 4-3.



شكل 4-3

مثال 4.2 قارب سرعة محركه 12 ميل/ساعة فى الماء الساكن وُجه عبر نهر سرعة تيار الماء فيه 4 ميل/ساعة. كما هو واضح من شكل 4-4. المتجه **CD** يمثل سرعة التيار والمتجه **AB** بنفس مقياس الرسم يمثل سرعة القارب فى الماء الساكن. ولذلك فإن المتجه **AB** يساوى ثلاثة أمثال المتجه **CD**.

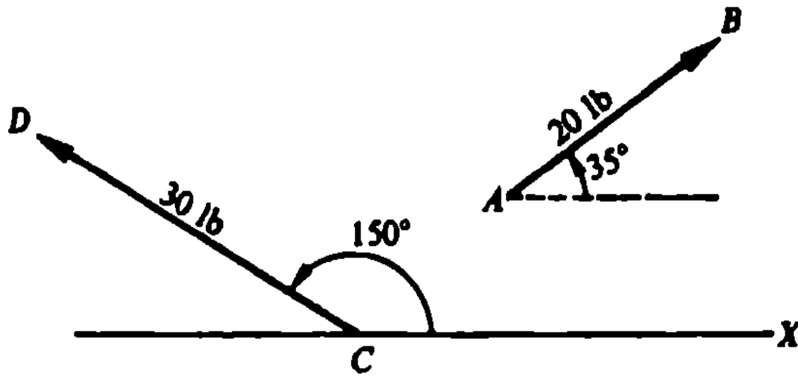
Example 4.2 A motor boat having the speed 12 mi/h in still water is headed directly across a river whose current is 4 mi/h. In Figure 4-4, the vector **CD** represents the velocity of the current and the vector **AB** represents, to the same scale, the velocity of the boat in still water. Thus, vector **AB** is three times as long as vector **CD**.



شكل 4-4

مثال 4.3 فى شكل 4-5 المتجـه **AB** يمثـل قـوة مقدارهـا 20 lb ويميـل بزاوية مقدارها 35° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، والمتجه **CD** يمثل قوة مقدارها 30 lb ويميل بزاوية مقدارها 150° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. يستخدم مقياس رسم واحد عند رسم المتجهين.

Example 4.3 In Figure 4-5, vector **AB** represents a force of 20 lb making an angle of 35° with the positive direction on the x axis and vector **CD** represents a force of 30 lb at 150° with the positive direction on the x axis. Both vectors are drawn to the same scale.



شكل 4-5

يقال إن المتجهين متساويان إذا كان المتجهان متساويين فى المقدار والاتجاه.



تــذكــر!

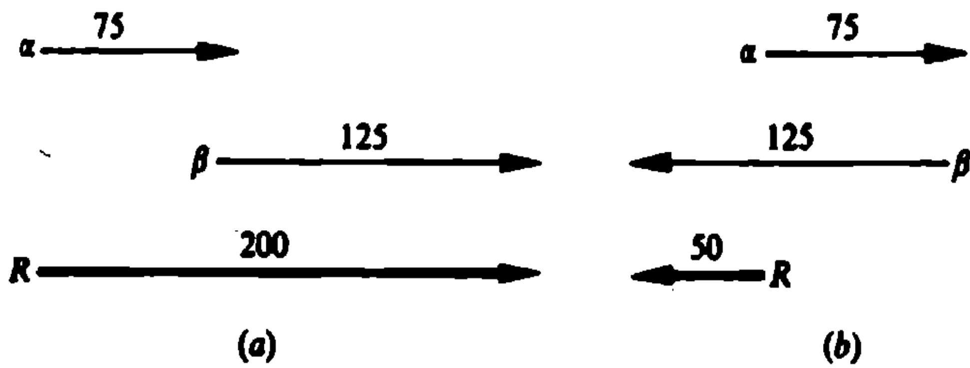
يمكن رسم المتجه فى أى مكان فى المسـتوى مع عـدم تغيير المقدار والاتجاه للمتجه.

جمع المتجهات Vector Addition

المحصلـة Resultant أو الجمـع الاتجـاهى لمجموعـة مـن المتجـهات هى عبارة عن متجه فى المسـتوى لـه نفـس تـأثير مجموعـة المتجـهات الأصلية متحدة مع بعضها البعض.

المحصلة R للمتجهين α، β فى اتجاه واحـد هـى المجمـوع الجـبرى لقيمة المتجهين فى نفس الاتجاه. انظر شكل 4-6(*a*).

إذا كان المتجهان فى اتجاهين متضادين، فإن محصلتهم R هى الفرق بين مقدار المتجهين (المقدار الأكبر ـ المقدار الأصغـر) ويكـون اتجـاه المحصلة فى اتجاه المقدار الأكبر لأحد المتجهين. شكل 4-6(*b*).



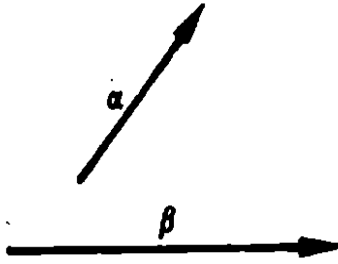
شكل 4-6

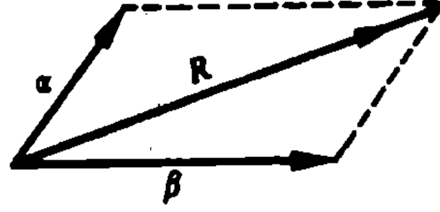
فى كل الحالات الأخرى يمكن استنتاج مقدار واتجاه المحصلة بـإحدى الطرق الآتية:

(1) **طريقة متوازى الأضلاع Parallelogram Method**: نمثـل المتجـهين بضلعيـن متجـاورين مـن متـوازى أضـلاع مـن نقطـة *O* فـى نفـس المستوى للمتجهين، ونكمل شكل متوازى الأضـلاع ليكـون القطـر المرسوم من نقطة *O* هو محصلـة المتجـهين أو المجمـوع الجـبرى للمتجهين المعلومين. وشكل 4-7(*b*) يوضح المحصلة R للمتجـهين α، β الموضحين بشكل 4-7(*a*).

(2) **طريقـة مثلـث القـوى Triangle Method**: نختـار أحـد المتجــهين ونمثله بضلع من أضلاع مثلث بداية من نقطة *O*، ومن نهاية الضلـع نمثل المتجه الآخر بالضلع الثانى من أضلاع المثلث. ومن الشكل نسـتنتج أن الضلـع الثـالث الـذى يقفـل المثلـث يمثـل محصلـة

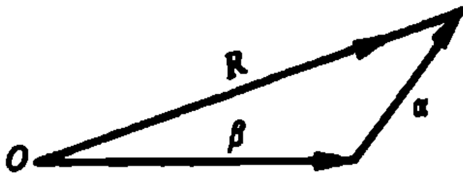
المتجهين المعلومين وفى الاتجاه الدورى المضاد. وشكـل 4-7(*c*) و 4-7(*d*) يوضح المحصلة **R** للمتجهين α و β.

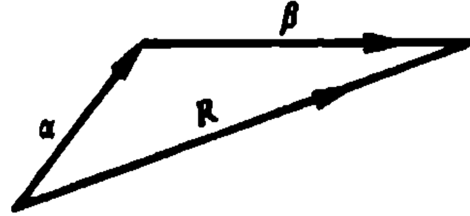




(*a*) (*b*)

طريقة متوازى الأضلاع Parallelogram Method





(*c*) (*d*)

طريقة مثلث القوى Triangle Method

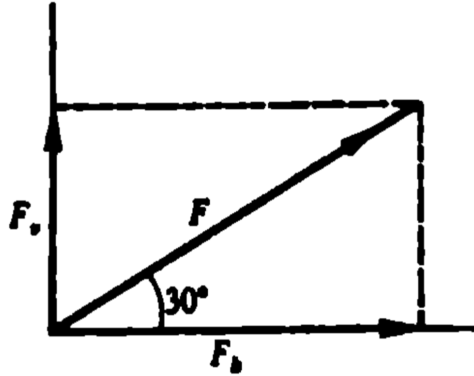
شكل 4-7

مركبات المتجه Components of a Vector

مركبة المتجه α على المستقيم L هى المسقط العمـودى للمتجـه علـى المستقيم L. وهى غالبًا ما تكون مفيدة جدًا فى عملية تحليل المتجهة فى اتجاهين متعامدين.

مثال 4.4 المركبة الأفقية للقوة **F** فى شكل 4-8 هــى: $F_h = F \cos 30°$ والمركبة الرأسية $F_v = F \sin 30°$ مـع ملاحظـة أن **F** هـى المجمـوع الجبرى لمحصلة القوتين F_h و F_v.

Example 4.4 In Figure 4-8, the force **F** has horizontal component $\mathbf{F}_h$ = F cos 30° and vertical component $\mathbf{F}_v$ = **F** sin 30°. Note that **F** is the vector sum or resultant of $\mathbf{F}_h$ and $\mathbf{F}_v$.



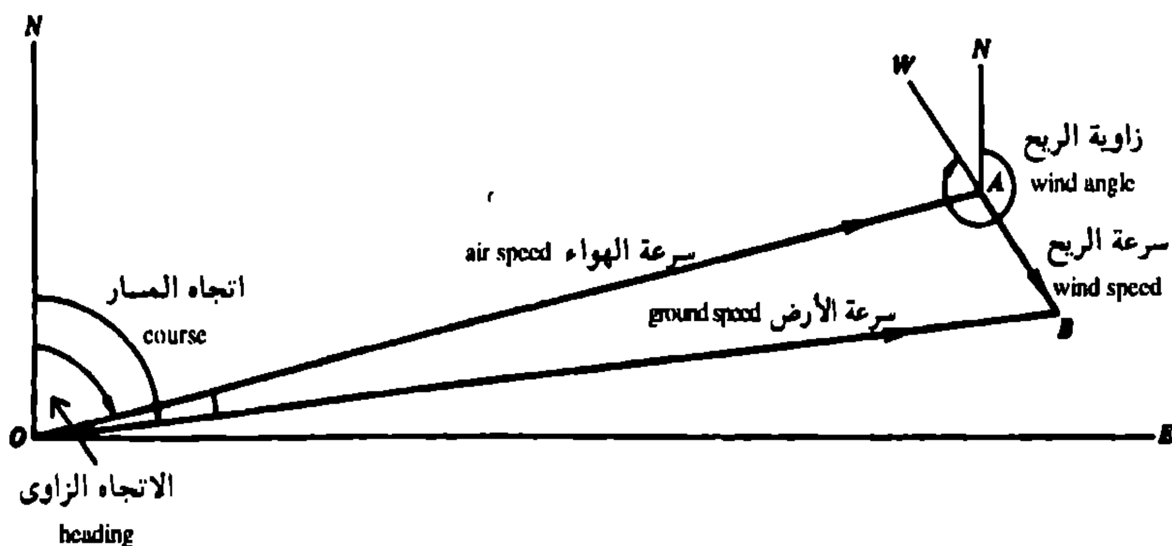
شكل 4-8

Air Navigation — الملاحة الجوية

الاتجاه الزاوى Heading هو اتجاه الطيران للطائرة (يُحـدد الاتجـاه مـن قراءة البوصلة). ويقاس الاتجاه الزاوى فى اتجاه دوران عقارب السـاعة من الشمال. ويعبر عنه بالدرجات والدقـائق. ويحـدد مبيـن السـرعات سرعة الطائرة فى الهواء الساكن. ومسـار الطـائرة Course هـو الاتجـاه النسبى لحركة الطائرة بالنسبة للأرض ويقاس المسار فـى اتجـاه دوران عقارب الساعة من الشمال.

السرعة النسبية الأرضية للطـائرة Ground Speed هـى سـرعة الطـائرة بالنسبة للأرض.

زاوية الانسياق Drift Angle (زاوية الريح) وهى الفرق (الموجب) بين الاتجاه الزاوى والمسار.



شكل 4-9

فى شكل 4-9 : ON هو خط الشمال الحقيقى من خلال نقطة O.

$\angle NOA$ هو الاتجاه الزاوى.

OA = سرعة الطائرة فى الهواء الساكن.

AN هو خط الشمال الحقيقى من خلال نقطة A.

$\angle NAW$ هى زاوية الريح مقاسة فى اتجاه دوران عقارب الساعة فى اتجاه خط الشمال.

AB = سرعة الريح.

$\angle NOB$ اتجاه المسار.

OB = السرعة النسبية الأرضية.

$\angle AOB$ زاوية الانسياق

In Figure 4-9: ON is the true north line through O

$\angle NOA$ is the heading

OA = the airspeed

AN is the true north line through A

$\angle NAW$ is the wind angle, measured clockwise from the north line

AB = the windspeed

$\angle NOB$ is the course

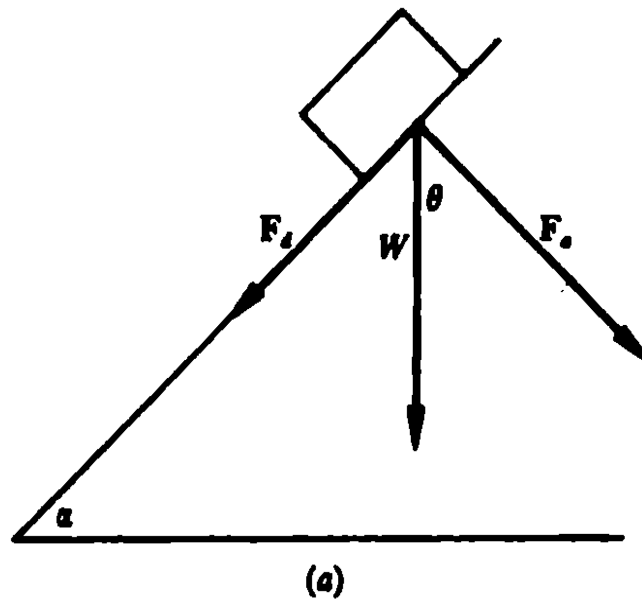
OB= the groundspeed

$\angle AOB$ is the drift angle

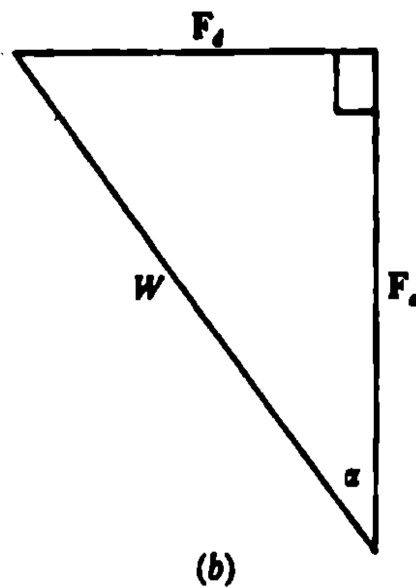
لاحظ أن هناك ثلاثة متجهات: المتجه OA يمثل سرعة الهواء والاتجاه الزاوى، والمتجه AB يمثل اتجاه وسرعة الريح، والمتجه OB يمثل السرعة النسبية الأرضية والمسار. متجه السرعة النسبية الأرضية هو محصلة متجه سرعة الطائرة ومتجه سرعة الريح.

المستوى المائل Inclined Plane

جسم وزنه W موضوع على مستوى مائل وزاوية ميل المستوى على الأفقى α فإذا كانت المركبة الأفقية للوزن فى اتجاه ميل المستوى $\mathbf{F}_d$.



(a)



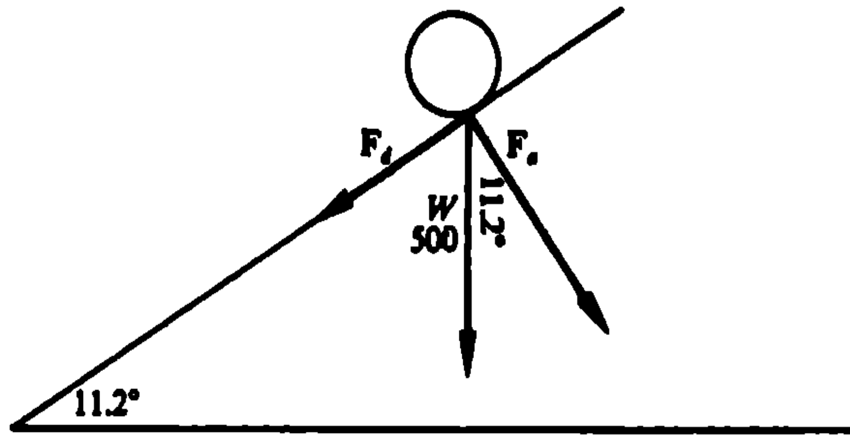
(b)

شكل 4-10

والمركبة الرأسية للوزن فى اتجاه عمودى على المستوى إلـى أسـفل F_a.
ولذلك فإن F_d و F_a هى مركبات متجه الوزن W. انظر شكل 4-10.

مثال 4.5 برميل وزنه 500 lb يستقر على مستوى مائل يميل بزاوية 11.2° على المستوى الأفقى. أوجد القوة اللازمة لمنع الـبرميل مـن الانـزلاق إلى أسفل المستوى ثم أوجد رد الفعل العمودى على المسـتوى. (مـع إهمال الاحتكاك).

Example 4.5 A 500-lb barrel rests on an 11.2° inclined plane. What is the minimum force (ignoring friction) needed to keep the barrel from rolling down the incline and what is the force the barrel exerts against the surface of the inclined plane? (See Figure 4-11.)



شكل 4-11

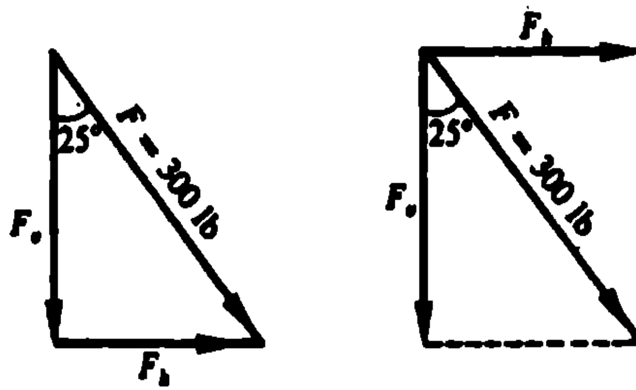
$$F_d = 500 \sin 11.2° = 500(0.1942) = 97.1 \text{ lb}$$

$$F_a = 500 \cos 11.2° = 500(0.9810) = 491 \text{ lb}$$

ومن الناتج نستنتج أن أقل قوة لازمة لمنع البرميل من الانزلاق إلـى أسفل هى 97.1 lb ورد الفعل العمودى للمستوى هو 491 lb.

مسألة محلولة 4.1 عمود تلغراف مثبت رأسيًا بواسطة سلك مشدود يميل على العمود بزاوية 25° فإذا كانت قوة الشد فى السلك 300 lb. أوجد المركبة الأفقية F_h والمركبة الرأسية F_v لقوة الشد فى السلك F. انظر شكل 12-4.

Solved Problem 4.1 A telegraph pole is kept vertical by a guy wire which makes an angle of 25° with the pole and which exerts a pull of F = 300 lb on the top. Find the horizontal and vertical components F_h and F_v of the pull F. See Figure 4-12.



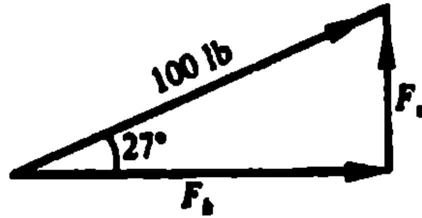
شكل 4-12

$$F_h = 300 \sin 25° = 300(0.4226) = 127 \text{ lb}$$

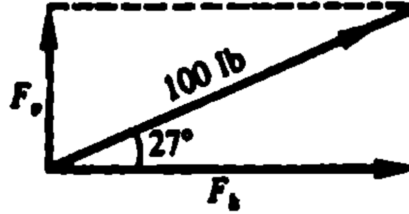
$$F_v = 300 \cos 25° = 300(0.9063) = 272 \text{ lb}$$

مسألة محلولة 4.2 يجر رجل زحافة بواسطة حبل يميل على الأفقى بزاوية 27° وذلك بقوة مقدارها 100 lb. (*a*) أوجد المركبة الأفقية لقوة الشد والمركبة الرأسية. (*b*) أوجد قوة الشد المطلوبة إذا كانت المركبة الأفقية للقوة هى 100 b فى مستوى الأرض أفقيًا.

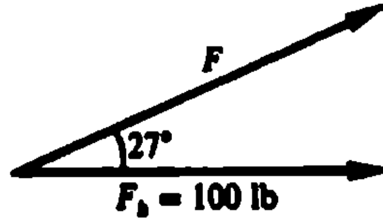
Solved Problem 4.2 A man pulls a rope attached to a sled with a force of 100 lb. The rope makes an angle of 27° with the ground. (*a*) Find the effective pull tending to move the sled along the ground and the effective pull tending to lift the sled vertically. (*b*) Find the force which the man must exert in order that the effective force tending to move the sled along the ground is 100 lb.



شكل 4-13



شكل 4-14



شكل 4-15

الحل:

(*a*) فى شكل 4-13، وشكل 4-14 تم تحليل قوة الشد 100 lb إلى مركبة أفقية $\mathbf{F}_h$ ومركبة رأسية $\mathbf{F}_v$ على الترتيب. ولذلك فإن $\mathbf{F}_h$ هى قوة الشد الأفقية، $\mathbf{F}_v$ هى قوة الشد الرأسية.

$$\mathbf{F}_h = 100 \cos 27° = 100(0.8910) = 89 \text{ lb}$$

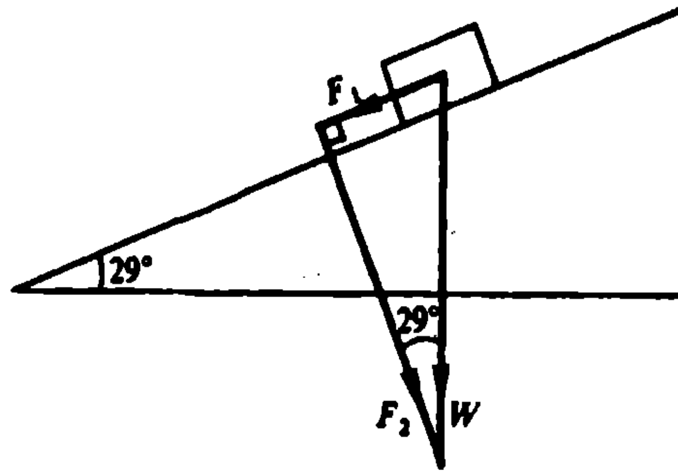
$$\mathbf{F}_v = 100 \sin 27° = 100(0.4540) = 45 \text{ lb}$$

(*b*) كما هو موضح بشكل 4-15 المركبة الأفقية لقوة الشد المطلوبة **F** هى $\mathbf{F}_h = 100$ lb إذن

$$\mathbf{F} = 100/\cos 27° = 100/0.8910 = 112 \text{ lb}$$

مسألة محلولة 4.3 جسم وزنه $W = 500$ lb يستقر على منحدر يميل على الأفقى زاوية مقدارها 29°. (*a*) أوجد القــوة اللازمـة لتحريـك الجسـم أسفل المنحدر ورد الفعل العمودى للمستوى. (*b*) ما هى أقل قوة لازمة لمنع الجسم من الانزلاق إلى أسفل المستوى مع إهمال الاحتكاك.

Solved Problem 4.3 A block weighing $W = 500$ lb rests on a ramp inclined 29° with the horizontal. (*a*) Find the force tending to move the block down the ramp and the force of the block on the ramp. (*b*) What minimum force must be applied to keep the block from sliding down the ramp? Neglect friction.



شكل 4-16

الحل:

(*a*) بالرجوع إلى شكل 4-16 نحلل الوزن إلـى مركبتيـن F_1، F_2 علـى التوالى. إحداهمـا موازيـة للمسـتوى F_1 والأخـرى عموديـة علـى المستوى F_2. حيث أن F_1 هى القوة التى تسبب حركة الجسم إلى أسفل المستوى و F_2 هى قوة الجسم المؤثرة على سطح المستوى.

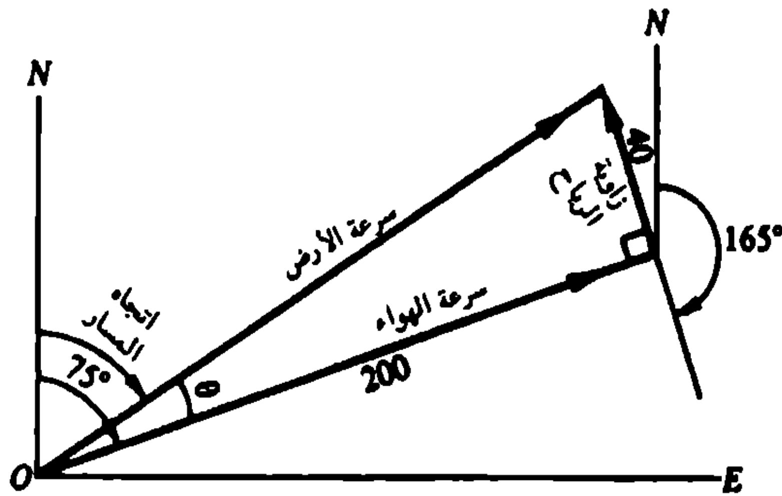
$$F_1 = W \sin 29° = 500(0.4848) = 242 \text{ lb}$$

$$F_2 = W \cos 29° = 500(0.8746) = 437 \text{ lb}$$

(*b*) 242 lb إلى أعلى المنحدر.

مسألة محلولة 4.4 إذا كان الاتجاه الزاوى لطائرة °75 من خط الشمال وسرعة الطائرة 200 ميل/ساعة. أوجد السرعة النسبية الأرضيــة واتجـاه المسار إذا كانت ســرعة الريـح 40 ميـل/ســاعة بزاويـة °165 مـن خـط الشمال. انظر شكل 4-17

Solved Problem 4.4 The heading of an airplane is 75° and the airspeed is 200 mi/h. Find the groundspeed and course if there is a wind of 40 mi/h from 165°. Refer to Figure 4-17.



شكل 4-17

الحل:

نرسم أولاً متجه السرعة من نقطة O ويليه متجه ســرعة الريـح ثـم نقفـل المثلث.

$$\text{(سرعة الأرض) groundspeed} = \sqrt{(200)^2 + (40)^2} = 204 \text{ mi/h},$$

$$\tan\theta = 40/200 = 0.2000 \quad \text{and} \quad \theta = 11°\ 20'$$

اتجاه المسار course

$$\text{(اتجاه المسار) course} = 75° - \theta = 63°\ 40'$$

الفصل الخامس

الاختزال لدوال الزوايا الحادة الموجبة

Reduction to Functions of Positive Acute Angles

في هذا الفصل:

- ✔ الزوايا المتطابقة
- ✔ دوال الزاوية السالبة
- ✔ الزوايا المنتسبة
- ✔ قيمة الدالة للزوايا

الزوايا المتطابقة — Coterminal Angles

نفرض أن θ هى أى زاوية: إذن

$$\cos(\theta + n360^\circ) = \cos\theta \qquad \sin(\theta + n360^\circ) = \sin\theta$$

$$\cot(\theta + n360^\circ) = \cot\theta \qquad \tan(\theta + n360^\circ) = \tan\theta$$

$$\csc(\theta + n360^\circ) = \csc\theta \qquad \sec(\theta + n360^\circ) = \sec\theta$$

حيث n هى أى عدد صحيح موجب أو سالب أو يساوى الصفر.

Example 5.1 **مثال 5.1**

(*a*) $\sin 400° = \sin (40° + 360°) = \sin 40°$

(*b*) $\cos 850° = \cos (130° + 2 \cdot 360°) = \cos 130°$

(*c*) $\tan (-1000°) = \tan (80° - 3 \cdot 360°) = \tan 80°$

إذا كان قياس زاوية θ بالتقدير الدائرى فإن:

$\sin (x + 2n\pi) = \sin x$ $\quad$ $\cos (x + 2n\pi) = \cos x$

$\tan (x + 2n\pi) = \tan x$ $\quad$ $\cot (x + 2n\pi) = \cot x$

$\sec (x + 2n\pi) = \sec x$ $\quad$ $\csc (x + 2n\pi) = \csc x$

حيث أن n أى عدد صحيح.

Functions of a Negative Angle دوال الزاوية السالبة

نفرض أن زاوية θ هى أى زاوية. إذن:

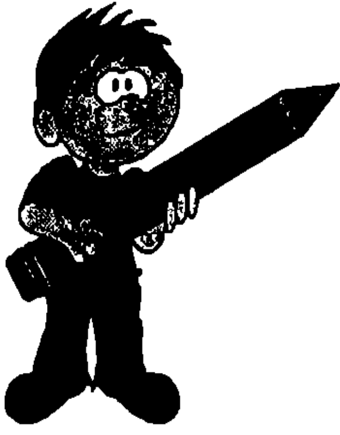
$\sin (-\theta) = -\sin \theta$ $\quad$ $\cos (-\theta) = \cos \theta$

$\tan (-\theta) = -\tan \theta$ $\quad$ $\cot (-\theta) = -\cot \theta$

$\sec (-\theta) = \sec \theta$ $\quad$ $\csc (-\theta) = -\csc \theta$

Reference Angles الزوايا المنتسبة

إذا كانت زاوية θ هى زاوية ربعية فإننا لا نحتــاج زاويــة منتســبة. وإذا أمكن كتابة أى زاوية على صورة $\theta + n \cdot 360°$ حيث أن n عدد صحيــح و $0° \leq \theta \leq 360°$ فإنه يمكن إيجاد زوايا منتسبة للزوايا من $0°$ إلى $360°$.



ويمكن تعريف الزاوية المنتسبة R للزاوية θ فى الوضع القياسى على أنه الزاوية الحادة الموجبة بين محور السينات والضلع الخارجي للزاوية θ.

قيم الدوال الست للزاوية المنتسبة R للزاوية θ يتفق مع قيمة الدوال للزاوية θ ربما الاختـلاف فـى الإشارة فقط. ويتم تحديد إشـارة منسـوب الزاوية R حسَب الربع الذى تقع فيه زاوية θ ولذلك فإن أى دالة للزاوية θ يمكن التعبير عنها بالزاوية الحادة للزاوية المنتسبة R ويستخدم الجدول التالى فى إيجاد قيمة الدوال المثلثية لأى زاوية.

إشارات الدالة Function Signs	العلاقة Relationship	ربع الزاوية Quadrant for θ
كل الدوال المثلثية موجبة	$R = \theta$	I
$\sin R$ ، $\csc R$ موجبة	$R = 180° - \theta$	II
$\tan R$ ، $\cot R$ موجبة	$R = \theta - 180°$	III
$\cos R$ ، $\sec R$ موجبة	$R = 360° - \theta$	IV

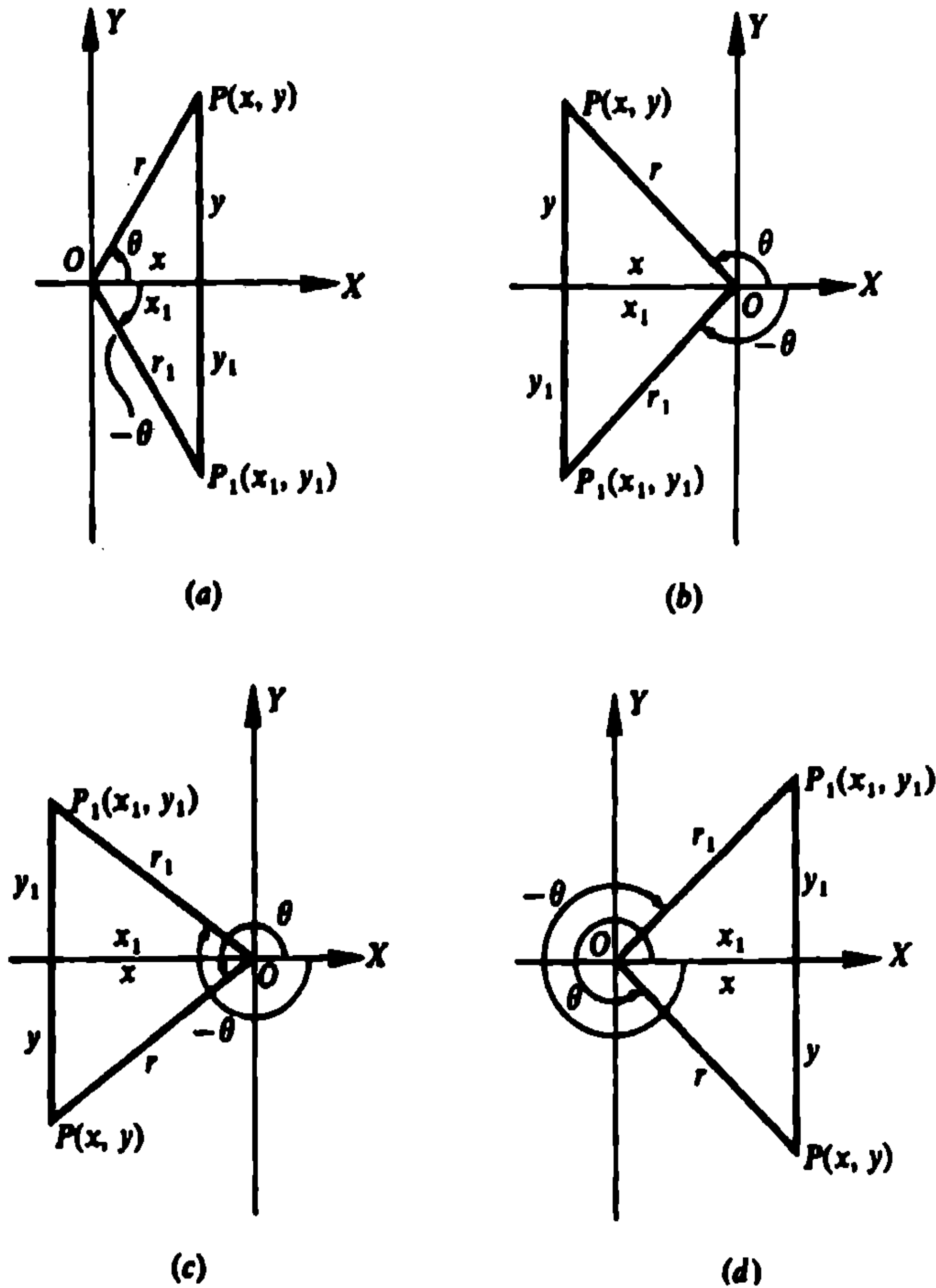
قيمة الدالة للزوايا

Angles with a Given Function Value

قيمة الدوال للزوايا المتطابقة متساوية وهناك عدد غير محدود من الزوايا متساوية القيمة للدوال المثلثية للزوايا. وحتى عند تحديد الزوايا فى المرحلة من 0° إلى 360° يوجد عادة زاويتان لـهما نفس قيمـة الدالـة وكل الزوايا التى تتساوى فى قيمة الدالة لـها نفس الزاويـة المنتسـبة. وأرباع الزاوية تحددها الإشارة لقيمة الدالـة. والعلاقـات المثلثيـة فـى الجزء السابق تستخدم لإيجاد الزاوية بفرض معرفة الزاوية المنتسبة.

مسألة محلولة 5.1 استنتج علاقات الدوال للزاوية $-\theta$ بمعلومية الزاوية θ.

Solved Problem 5.1 Derive formulas for the functions of $-\theta$ in terms of θ.



شكل 5-1

فى شكل 5-1 تم تحديد زاوية θ، $-\theta$ وهما متساويتان عدديًا. وتقع نقطة $P(x, y)$ على الضلع الخارجى لزاوية θ ونقطة $P_1(x_1, y_1)$ على الضلع الخارجى لزاوية $-\theta$ على الترتيب حيث أن: $OP = OP_1$ وفى كل شكل من هذه الأشكال الأربعة يتطابق المثلثان، $r_1 = r$ و $x_1 = x$ و $y_1 = -y$. إذن:

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{r_1}{x_1} = \frac{r}{x} = \sec\theta$$

$$\csc(-\theta) = \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{-y} = -\frac{r}{y} = -\csc\theta$$

وعدا بعض هذه الحالات عندما تكون الدالة غير معرفة والعلاقات السابقة أيضًا حقيقية عندما تكون زاوية θ زاوية ربعية يتحقق بفرض أن الزوايا °0- و °0- و °90- و °270 و °180- و °180 و °270- و °90 هي زوايا متطابقة.

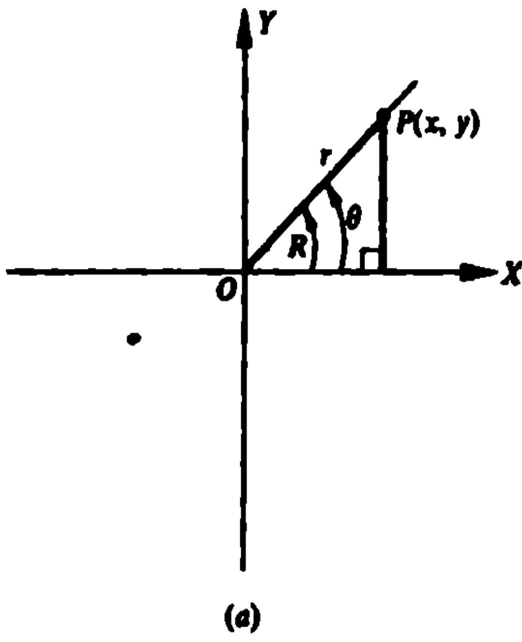
وعلى سبيل المثال:

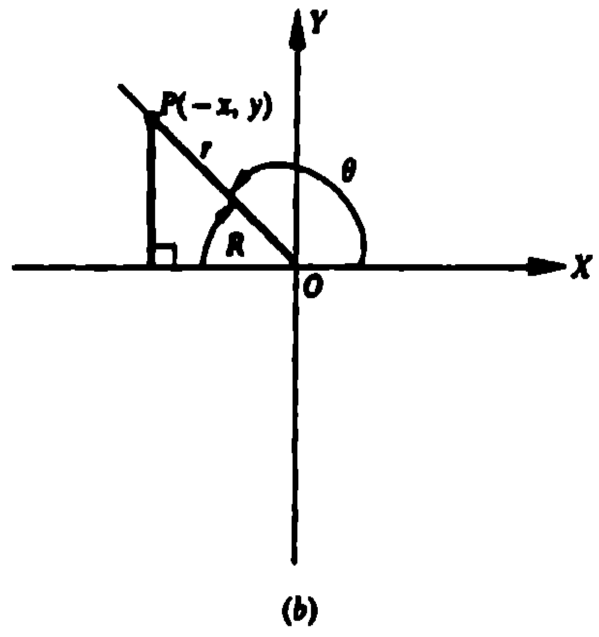
$\sin(-0°) = \sin 0° = 0 = -\sin 0°$, $\sin(-90°) = \sin 270° = -1 = -\sin 90°$,

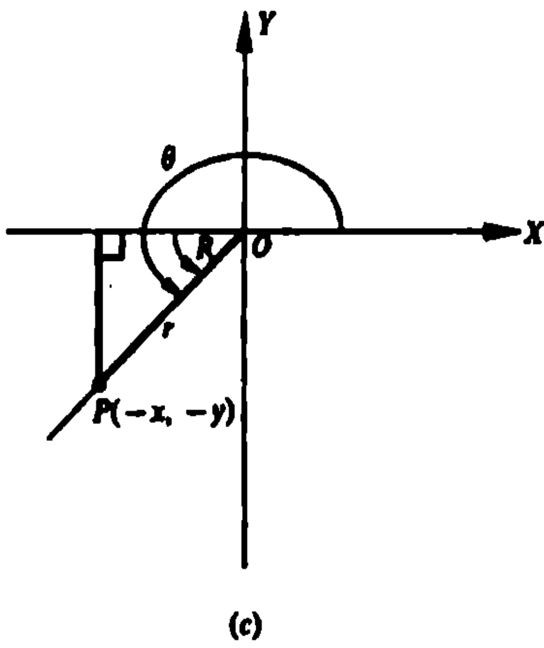
$\cos(-180°) = \cos 180°$ و $\cot(-270°) = \cot 90° = 0 = -\cot 270°$.

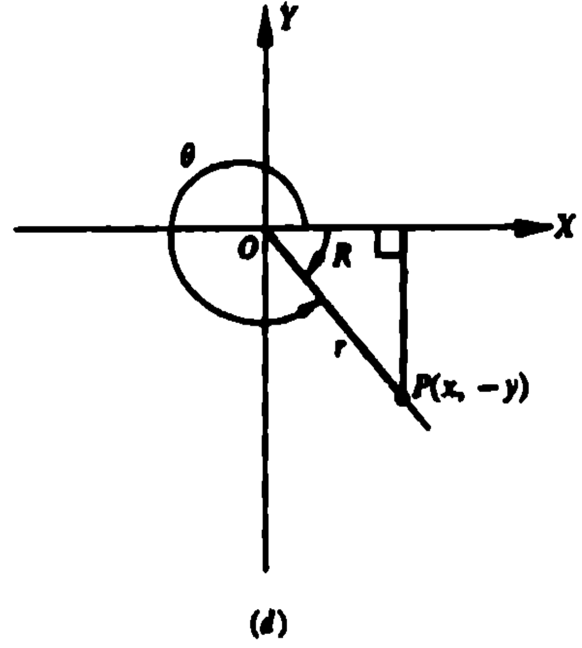
مسألة محلولة 5.2 حقق تساوى الدوال المثلثية لزاوية θ ومنسوب الزاوية R عندما تكون: $x > 0$ و$y > 0$ و $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solved Problem 5.2 Verify the equality of the trigonometric functions for θ and its reference angle R where $x > 0$, $y > 0$, and $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.









شكل 5-2

الحل:

(a) عندما تقع θ فى الربع الأول انظر شكل 5-2(a) .

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \sin R \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \cos R$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \tan R \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} = \cot R$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \sec R \qquad \csc \theta = \frac{r}{y} = \csc R$$

(b) عندما تقع θ فى الربع الثانى. انظر شكل 5-2(b).

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \sin R \qquad \cos \theta = \frac{-x}{r} = -\left(\frac{x}{r}\right) = -\cos R$$

$$\tan \theta = \frac{y}{-x} = -\left(\frac{y}{x}\right) = -\tan R \qquad \cot \theta = \frac{-x}{y} = -\left(\frac{x}{y}\right) = -\cot R$$

$$\sec \theta = \frac{r}{-x} = -\left(\frac{r}{x}\right) = -\sec R \qquad \csc \theta = \frac{r}{y} = \csc R$$

(c) عندما تقع θ فى الربع الثالث. انظر شكل 5-2(c).

$$\sin \theta = \frac{-y}{r} = -\left(\frac{y}{r}\right) = -\sin R \qquad \cos \theta = \frac{-x}{r} = -\left(\frac{x}{r}\right) = -\cos R$$

$$\tan \theta = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan R \qquad \cot \theta = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} = \cot R$$

$$\sec \theta = \frac{r}{-x} = -\left(\frac{r}{x}\right) = -\sec R \qquad \csc \theta = \frac{r}{-y} = -\left(\frac{r}{y}\right) = -\csc R$$

(*d*) عندما تقع θ فى الربع الرابع. انظر شكل 5-2(*d*).

$$\sin\theta = \frac{-y}{r} = -\left(\frac{y}{r}\right) = -\sin R \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \cos R$$

$$\tan\theta = \frac{-y}{x} = -\left(\frac{y}{x}\right) = -\tan R \qquad \cot\theta = \frac{x}{-y} = -\left(\frac{x}{y}\right) = -\cot R$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \sec R \qquad \csc\theta = \frac{r}{-y} = -\left(\frac{r}{y}\right) = -\csc R$$

الفصل السادس

متغيرات ومنحنيات الدوال المثلثية

Variations and Graphs of the Trigonometric Functions

فى هذا الفصل:

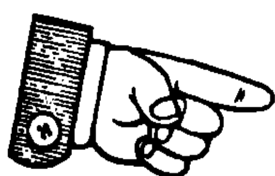
- ✔ التمثيل الخطى للدوال المثلثية
- ✔ متغيرات الدوال المثلثية
- ✔ التمثيل البيانى للدوال المثلثية
- ✔ الإزاحة الأفقية والرأسية
- ✔ الدوال الدورية
- ✔ منحنيات الجيب

التمثيل الخطى للدوال المثلثية

Line Representations of Trigonometric Functions

نفرض أن زاوية θ هى زاوية معلومة فى الوضع القياسى. (انظر شكل 6-1 موقع زاوية θ فى كل ربع من الأرباع الأربعة). ومن الرأس O كمركز نرسم دائرة نصف قطرها الوحدة لتقطع المحور الأساسى OX للزاوية θ فى A، والاتجاه الموجب لمحور الصادات فى B، والضلع الخارجى للزاوية θ

فى P. نرسم MP عمودى على OX ثم نرسم مماسين للدائرة من نقطـة A و B ليقطع المماسين الضلع الخارجى للزاوية θ أو امتداداه فـى نقطتـى R و Q على التوالى.



فـى كـل أجـزاء الشكـل 1-6 تتشابـه المثلثـات القائمـة OMP وOAQ وOBR ومـن تشابـه المثلثـات نستنتج العلاقات المثلثية الآتية:

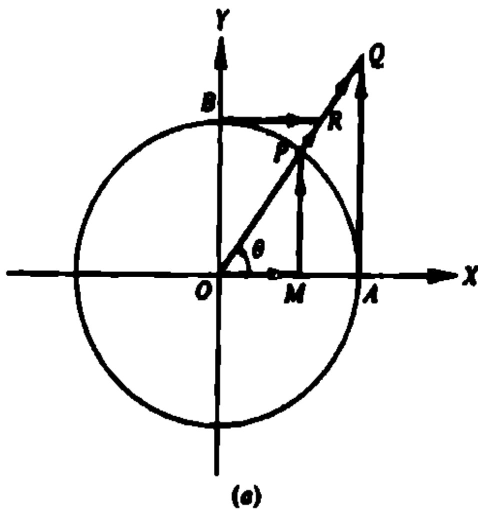
$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = OM \qquad \sin\theta = \frac{MP}{OP} = MP$$

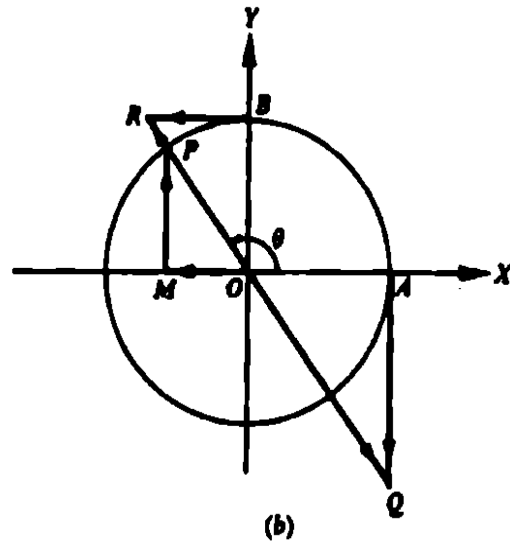
$$\cot\theta = \frac{OM}{MP} = \frac{BR}{OB} = BR \qquad \tan\theta = \frac{MP}{OM} = \frac{AQ}{OA} = AQ$$

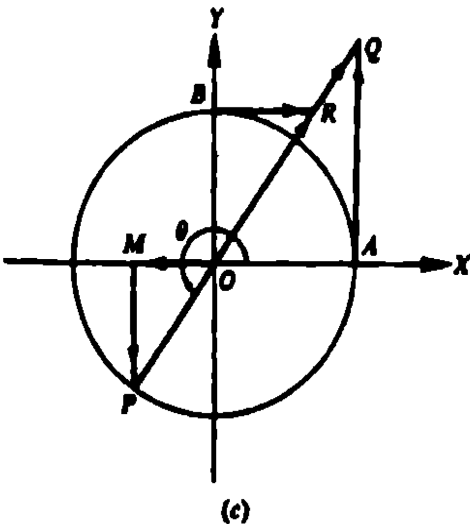
$$\csc\theta = \frac{OP}{MP} = \frac{OR}{OB} = OR \qquad \sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{OA} = OQ$$

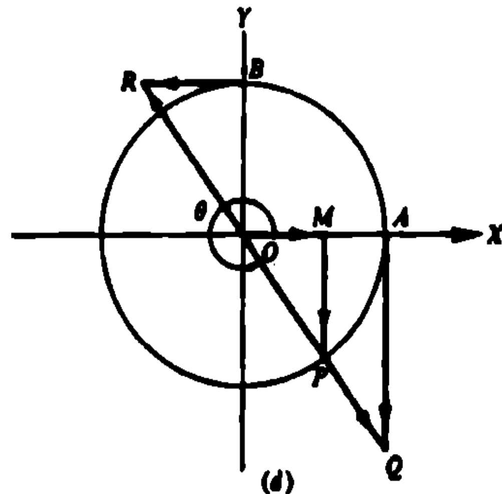
القطع المستقيمة MP، OM و AQ هى قطع مستقيمة. وقيمة الدالة هى طول القطعة المستقيمة المناظرة وإشارة الدالة يحددهـا اتجـاه القطعـة المستقيمة. والقطع المستقيمة الموجبـة OQ و OR تكـون موجبـة عنـد قياسها على الضلع الخارجى للزاوية وتكون سـالبة عنـد قياسـها علـى امتداد الضلع الخارجى للزاوية.

As θ Increases from	0° to 90°	90° to 180°	180° to 270°	270° to 360°
$\sin\theta$	*I.* from 0 to 1	*D.* from 1 to 0	*D.* from 0 to −1	*I.* from −1 to 0
$\cos\theta$	*D.* from 1 to 0	*D.* from 0 to −1	*I.* from −1 to 0	*I.* from 0 to 1
$\tan\theta$	*I.* from 0 without limit (0 to +∞)	*I.* from large negative values to 0 (−∞ to 0)	*I.* from 0 without limit (0 to +∞)	*I.* from large negative values to 0 (−∞ to 0)
$\cot\theta$	*D.* from large positive values to 0 (+∞ to 0)	*D.* from 0 without limit (0 to −∞)	*D.* from large positive values to 0 (+∞ to 0)	*D.* from 0 without limit (0 to −∞)
$\sec\theta$	*I.* from 1 without limit (1 to +∞)	*I.* from large negative values to −1 (−∞ to −1)	*D.* from −1 without limit (−1 to −∞)	*D.* from large positive values to 1 (+∞ to 1)
$\csc\theta$	*D.* from large positive values to 1 (+∞ to 1)	*I.* from 1 without limit (1 to +∞)	*I.* from large negative values to −1 (−∞ to −1)	*D.* from −1 without limit (−1 to −∞)









شكل 6-1

متغيرات الدوال المثلثية

Variations of Trigonometric Functions

نفرض أن نقطة P تتحرك عكس دوران عقارب الساعة حول دائرة الوحدة بداية من نقطة A فإن $\theta = \angle AOP$ تتغير باستمرار من $0°$ إلى $360°$. لاحظ فى شكل 1-6 كيفية تغير الدوال المثلثية. (تزايد I وتناقص D).

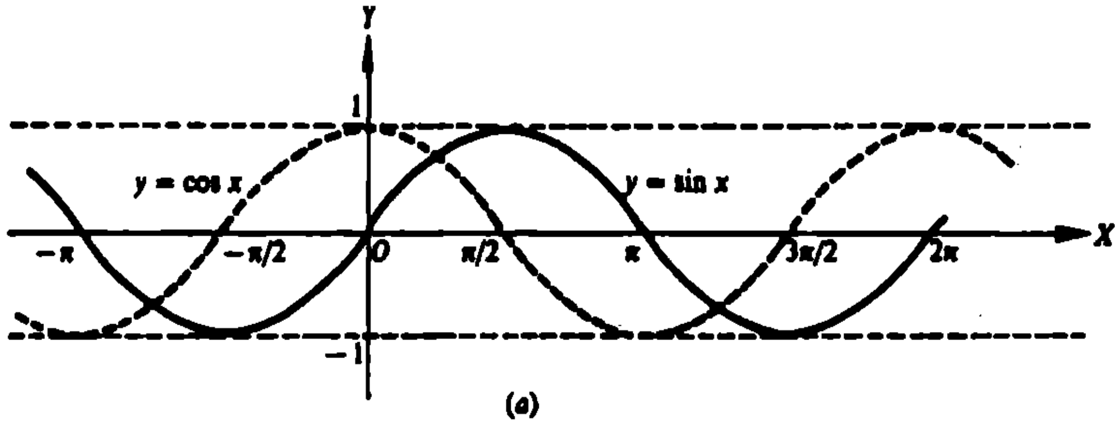
التمثيل البيانى للدوال المثلثية

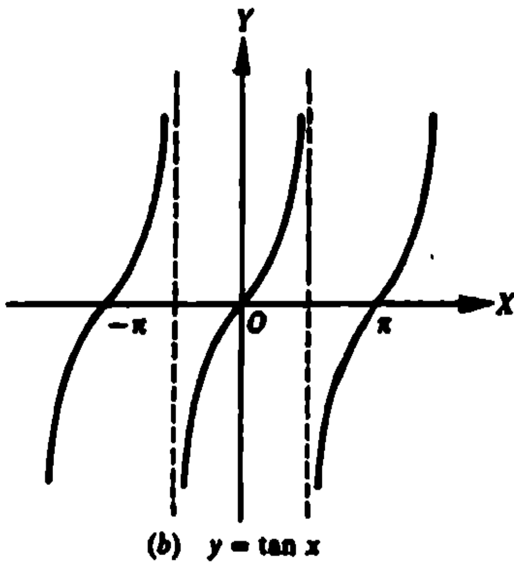
Graphs of Trigonometric Functions

فى الجدول التالى قيم الزاوية x معطاة بالتقدير الدائرى وعلى أى حال الدوال المثلثية تكون غير معرفة لقيمة x، $\pm\infty$ مسجلة بدلاً من قيمة الدالة غير المعرفة. منحنيات الدوال المثلثية موضحة بشكل 2-6.

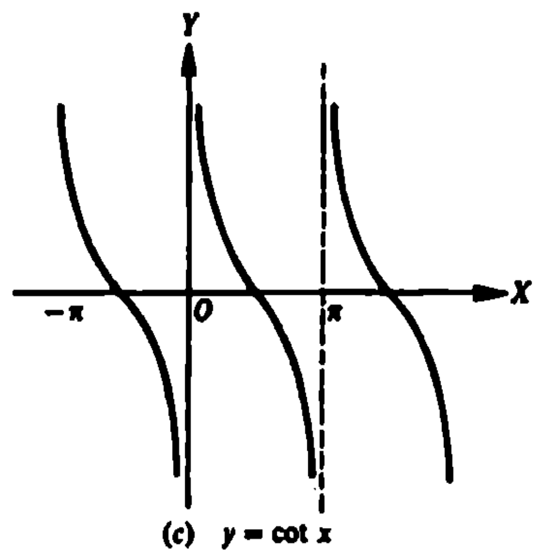
x	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$	$y = \sec x$	$y = \csc x$
0	0	1.00	0	$\pm\infty$	1.00	$\pm\infty$
$\pi/6$	0.50	0.87	0.58	1.73	1.15	2.00
$\pi/4$	0.71	0.71	1.00	1.00	1.41	1.41
$\pi/3$	0.87	0.50	1.73	0.58	2.00	1.15
$\pi/2$	1.00	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1.00
$2\pi/3$	0.87	−0.50	−1.73	−0.58	−2.00	1.15
$3\pi/4$	0.71	−0.71	−1.00	−1.00	−1.41	1.41
$5\pi/6$	0.50	−0.87	−0.58	−1.73	−1.15	2.00
π	0	−1.00	0	$\pm\infty$	−1.00	$\pm\infty$
$7\pi/6$	−0.50	−0.87	0.58	1.73	−1.15	−2.00
$5\pi/4$	−0.71	−0.71	1.00	1.00	−1.41	−1.41
$4\pi/3$	−0.87	−0.50	1.73	0.58	−2.00	−1.15
$3\pi/2$	−1.00	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	−1.00
$5\pi/3$	−0.87	0.50	−1.73	−0.58	2.00	−1.15
$7\pi/4$	−0.71	0.71	−1.00	−1.00	1.41	−1.41
$11\pi/6$	−0.50	0.87	−0.58	−1.73	1.15	−2.00
2π	0	1.00	0	$\pm\infty$	1.00	$\pm\infty$

منحنيات الدوال المثلثية موضحة بشكل 6-2

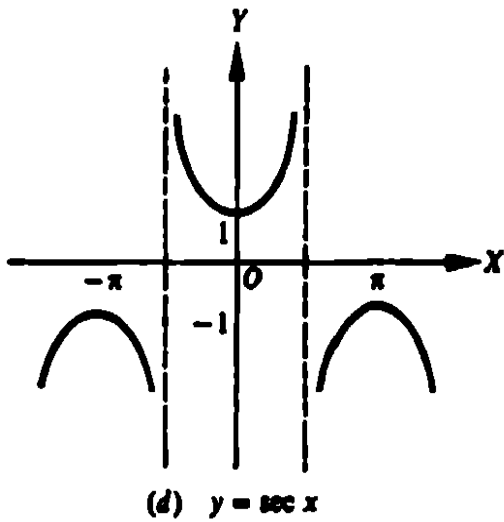




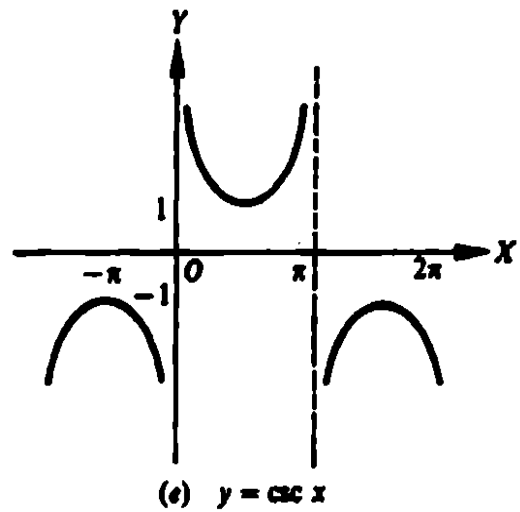
(b) y = tan x



(c) y = cot x



(d) y = sec x

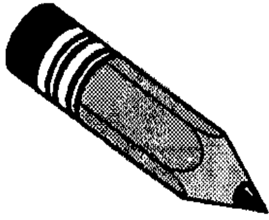


(e) y = csc x

شكل 6-2

الإزاحة الأفقية والرأسية

Horizontal and Vertical Shifts



الرسم البيانى للدالة المثلثية يزاح رأسيًا بإضافة الثابت غير الصفرى إلى الدالة وأفقيًا بإضافة العدد غير الصفرى لزاوية الدالة المثلثية. وشكل 6-3 يوضح منحنى الدالة $y = \sin x$ والجزء الآخر من شكل 6-3 يوضح كيفية نقل المحاور للدالة.

نفرض أن c هو عدد موجب وبإضافة هذا العدد إلى الدالة المثلثية يكون الناتج هو نقل المحاور للمنحنى إلى أعلى بمقدار c (انظر شكل 6-3(b)). وبطرح هذا العدد من الدالة المثلثية يكون الناتج هو نقل المحاور للمنحنى إلى أسفل بمقدار الوحدة c (انظر شكل 6-3(c)).

وعند إضافة العدد الموجب d إلى زاوية الدالة المثلثية يتم نقل محاور الدالة يساراً بمقدار العدد d (انظر شكل 6-3(d)) وتنقل يساراً بمقدار وحدات d عند طرح العدد الموجب d من زاوية الدالة (انظر شكل 6-3(e)).

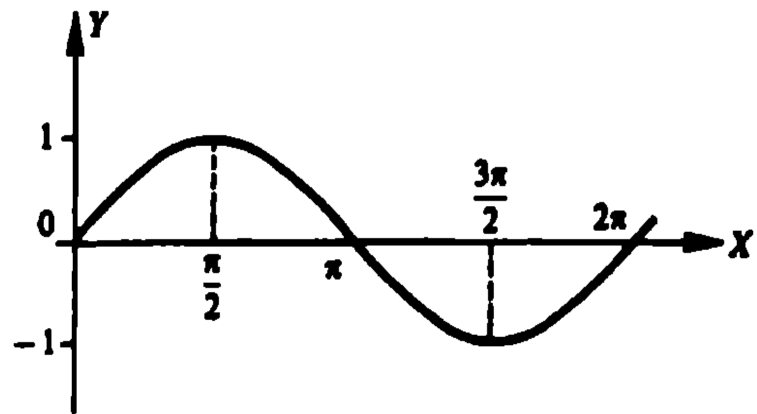
الدوال الدورية Periodic Functions

أى دالة $f(x)$ للمتغير x والتى تتكرر قيمتها فى دورات محدودة تسمى بالفترة Periodic. والمدى الأصغر لقيمة x والذى يتطابق مع دورة كاملة من قيمة الدالة يسمى "بفترة الدالة" ومن التمثيل البيانى. لمنحنيات الدوال المثلثية نجد أن فترات منحنيات الدوال المثلثية للجيب وجيب التمام وقاطع الزاوية هى 2π بينما للظل وظل تمام الزاوية هى π: ولذلك فإن

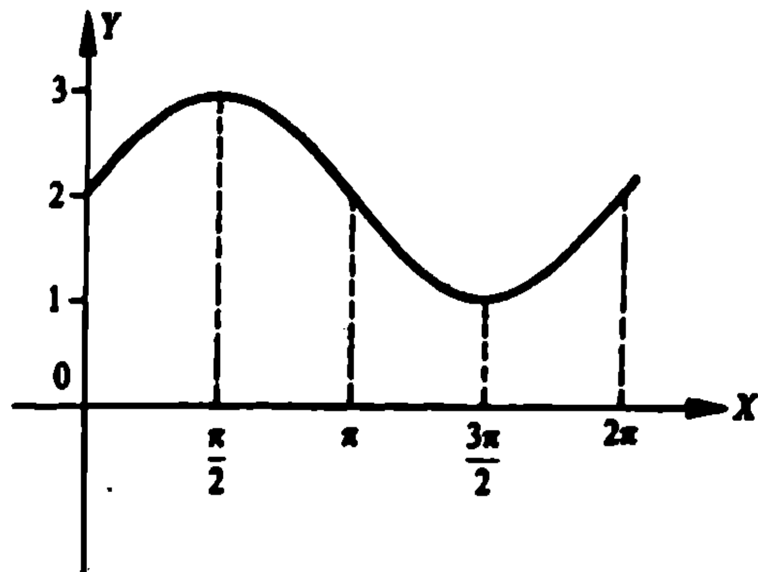
(1) $\sin(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x$ ويمكن استنتاج المنحنى $y = \cos x$ بنقل المنحنى $y = \sin x$ مسافة مقدارها $\frac{1}{2}\pi$ جهة اليسار.

(2) $\csc(\frac{1}{2}\pi + x) = \sec x$ ويمكن استنتاج المنحنى $y = \csc x$ بنقل المنحنى $y = \sec x$ مسافة مقدارها $\frac{1}{2}\pi$ جهة اليمين.

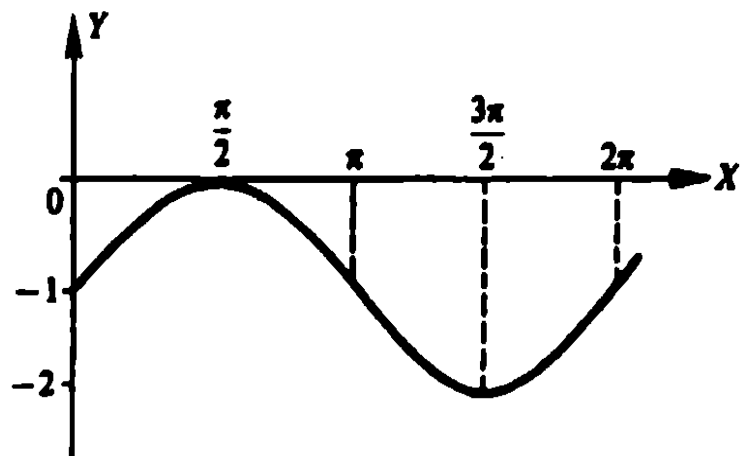
(a) $y = \sin x$



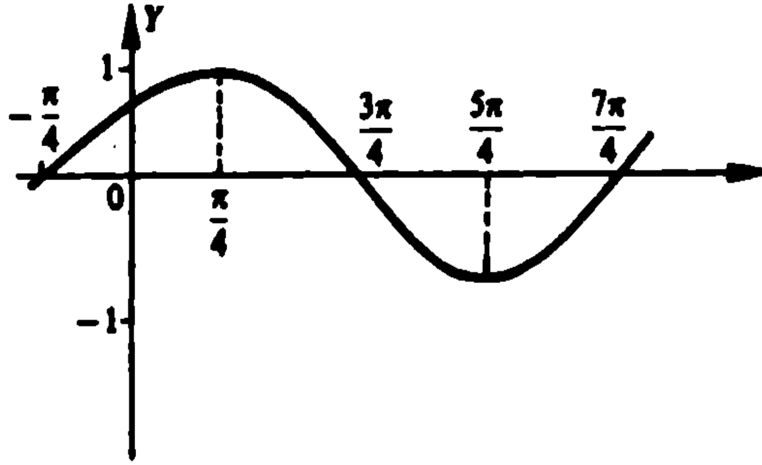
(b) $y = \sin x + 2$

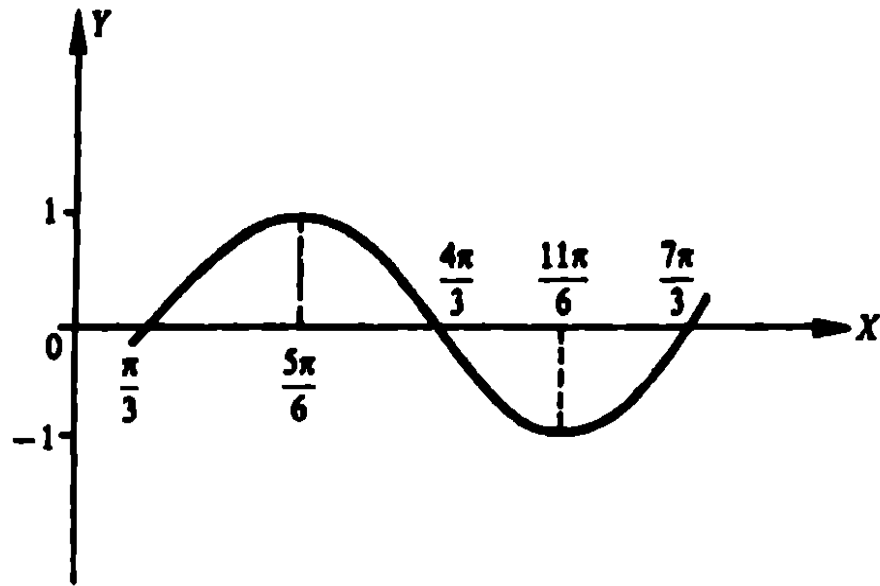


(c) $y = \sin x - 1$



شكل 6-3





تابع شكل 6-3

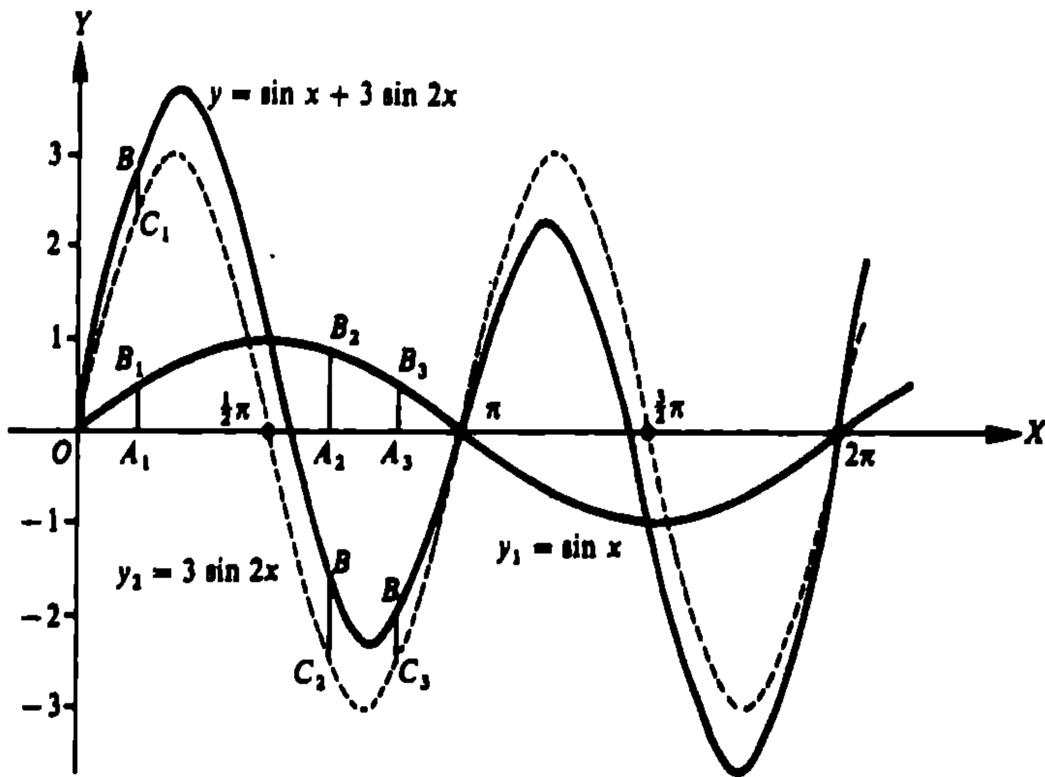
منحنيات الجيب Sine Curves

السعة amplitude والدورة period للمنحنى $y = \sin x$ هى 1 و 2π على الترتيب. ولكل قيمة من قيم x للدالة $y = a \sin x$ عندما $a > 0$ هى حاصل ضرب a فى الدالة $y = \sin x$ ولذلك فإن سعة الدالة $y = \sin x$ هى a والفترة 2π. وأيضًا عندما $bx = 2\pi$ و $x = 2\pi/b$ فإن سعة الدالة $y = \sin bx$ عندما $b > 0$ هى 1 والفترة $2\pi/b$.

والمنحنى العام للجيب للمعادلة: $y = a \sin bx$

حيث أن $a > 0$ و $b > 0$

تكون سعته a وفترته $2\pi/b$ ولذلك فإن المنحنى $y = 3 \sin 2x$ سعته 3 ودورته $2\pi/2 = \pi$. وشكل 6-4 يوضح شكل المنحنى $y = \sin x$ و $y = 3 \sin 2x$ على نفس المحاور.



شكل 6-4

وهناك أشكال عديدة من الحركة الموجية يمكن استنتاجها وذلك بدمج منحنيين أو أكثر من منحنيات الجيب.

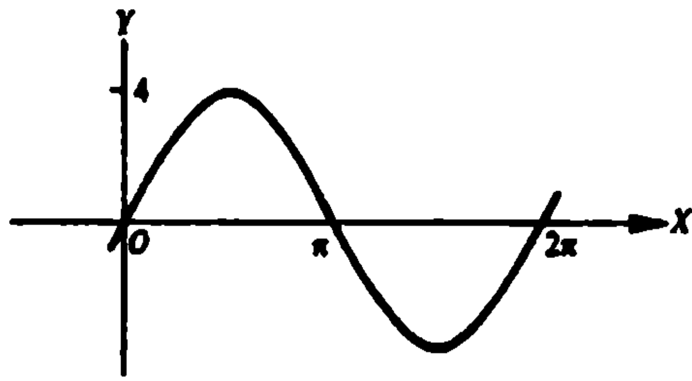
مسألة محلولة 6.1 ارسم منحنى الجيب موضحًا دورة واحدة لكل من الدوال الآتية:

Solved Problem 6.1 Sketch the graphs of the following for one period:

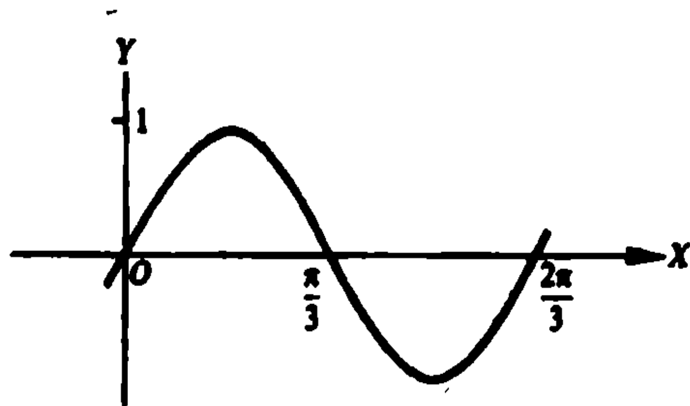
(*a*) $y = 4 \sin x$; (*b*) $y = \sin 3x$; (*c*) $y = 3 \sin (1/2)x$;

(*d*) $y = 2 \cos x = 2 \sin (x + (1/2)\pi)$;

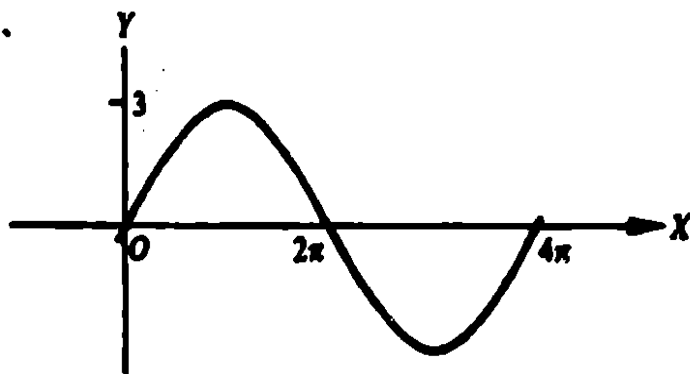
(*e*) $y = 3 \cos (1/2)x = 3 \sin ((1/2)x + (1/2)\pi)$.



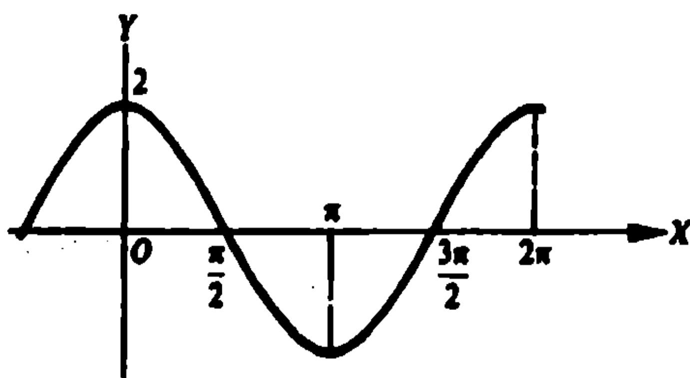
(a) $y = 4 \sin x$



(b) $y = \sin 3x$



(c) $y = 3 \sin \frac{1}{2}x$



(d) $y = 2 \cos x$

شكل 5-6

الحل: فى كل حالة نستخدم نفس المنحنى، ونمثل النقط لكل من الإحداثيات السينية والإحداثيات الصادية لكل منحنى على حدة لتحقيق المطلوب من السعة والفترة لكل من المنحنيات المطلوبة. انظر شكل (6-5).

(a) $y = 4 \sin x$ السعة = 4 والفترة = 2π

(b) $y = \sin 3x$ السعة = 1 والفترة = $2\pi/3$

(c) $y = 3 \sin (^1/_2)x$ السعة = 3 والفترة = $2\pi/(1/2) = 4\pi$

(d) $y = 2 \cos x$ السعة = 2 والفترة = 2π

لاحظ وضع محور الصادات:

(e) $y = 3 \cos (^1/_2)x$ السعة = 3 والفترة = 4π

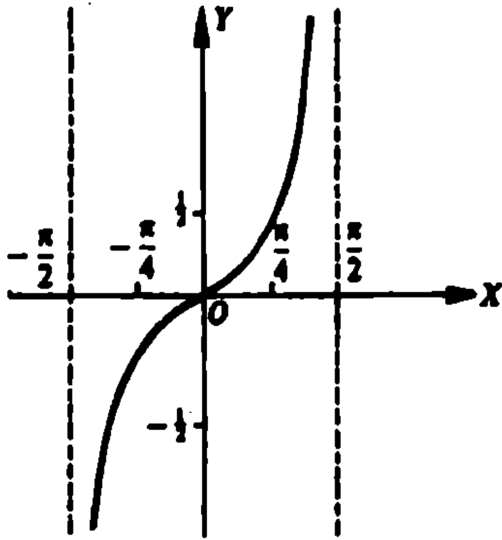
مسألة محلولة 6.2 ارسم منحنى الجيب لكل من الدوال الآتية:

Solved Problem 6.2 Construct the graph of each of the following:

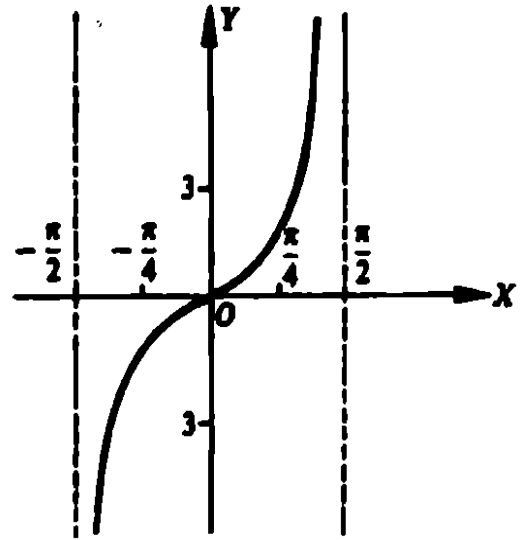
(*a*) $y = \frac{1}{2} \tan x$; (*b*) $y = 3 \tan x$; (*c*) $y = \tan 3x$; (*d*) $y = \tan (\frac{1}{4})x$.

الحل: فى كل حالة نستخدم نفس المنحنى ونمثل النقط لكل من الإحداثيات السينية والإحداثيات الصادية لكل منحنى على حدة، لتحقيق المطلوب من السعة والفترة لكل من المنحنيات المطلوبة. انظر شكل 6-6.

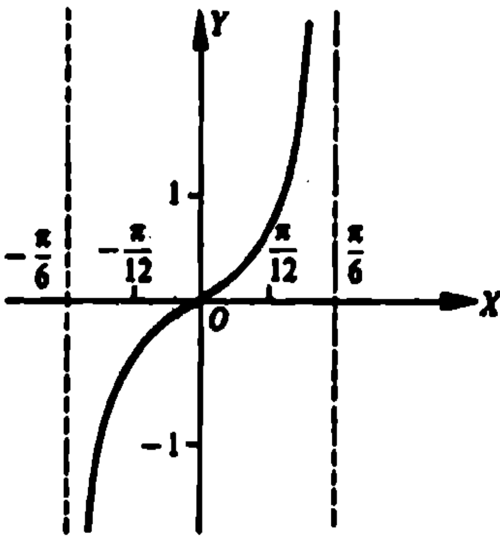
(*a*) $y = \frac{1}{2}\tan x$ has period π



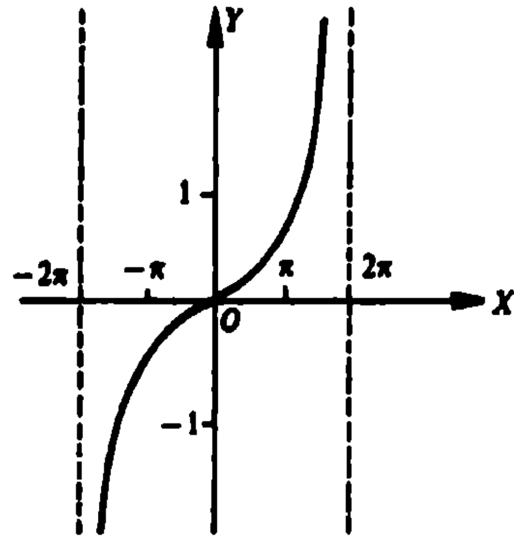
(*b*) $y = 3\tan x$ has period π



(*c*) $y = \tan 3x$ has period $\pi/3$



(*d*) $y = \tan \frac{1}{4}x$ has period $\pi/\frac{1}{4} = 4\pi$



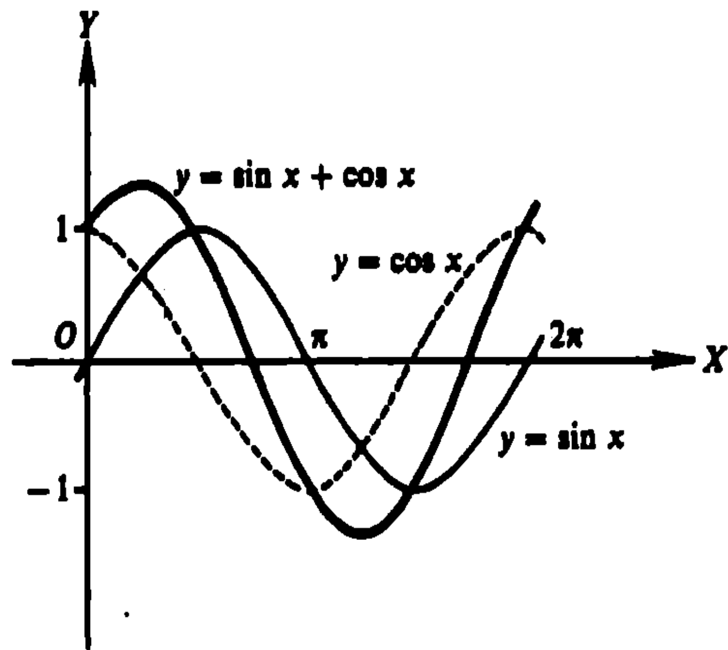
شكل 6-6

مسألة محلولة 6.3 ارسم المنحنى لكل من الدوال الآتية

Solved Problem 6.3 Construct the graph of each of the following:

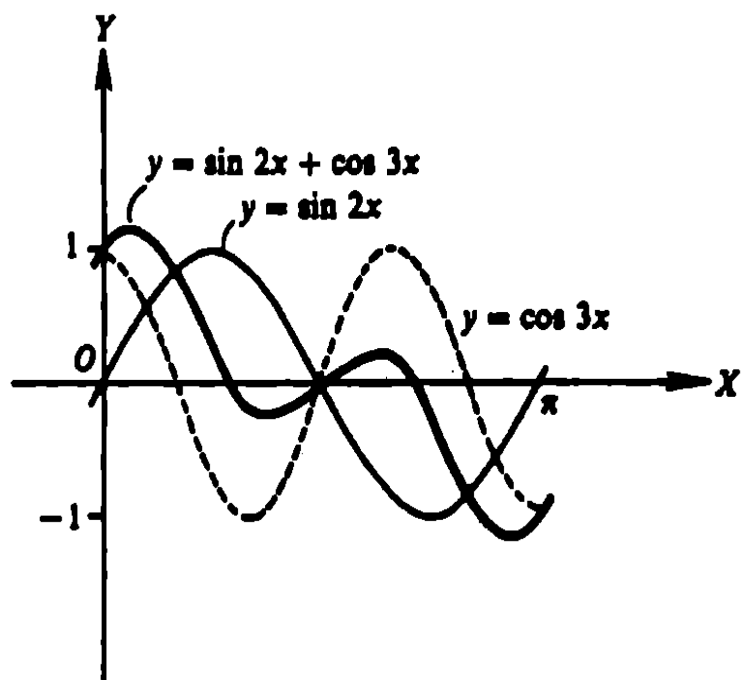
(*a*) $y = \sin x + \cos x$; (*b*) $y = \sin 2x + \cos 3x$; (*c*) $y = \sin 2x - \cos 3x$;
(*d*) $y = 3\sin 2x + 2\cos 3x$.

(*a*) $y = \sin x + \cos x$



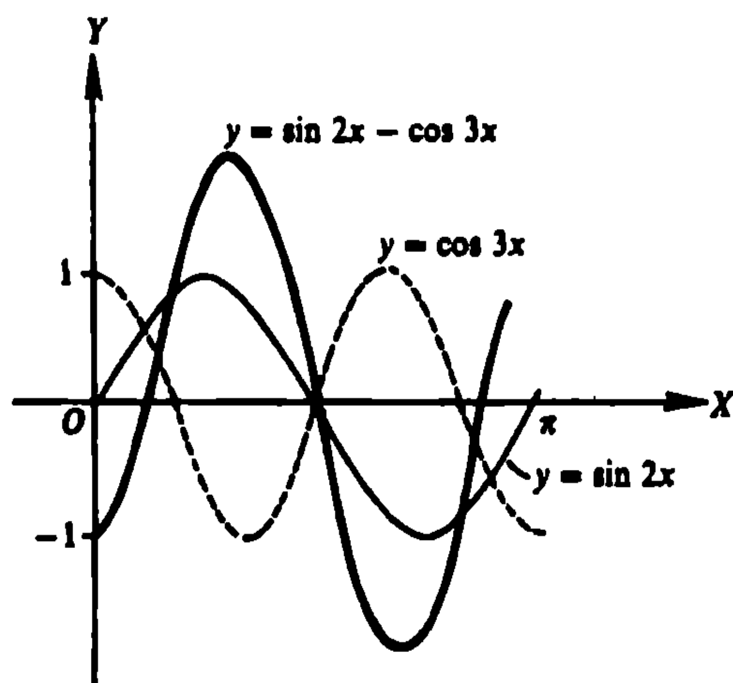
شكل 6-7(*a*)

(*b*) $y = \sin 2x + \cos 3x$



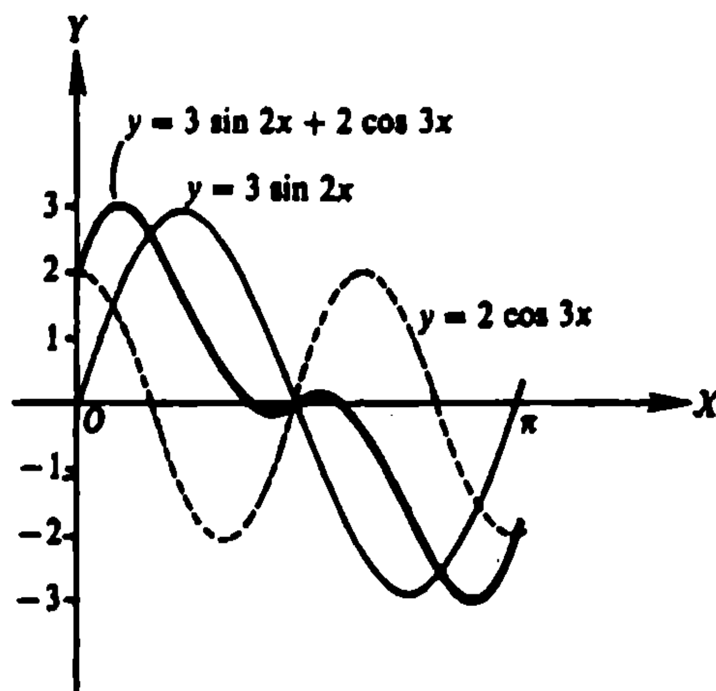
شكل 6-7(*b*)

(c) $y = \sin 2x - \cos 3x$



6-7(*c*) شکل

(d) $y = 3 \sin 2x + 2 \cos 3x$



6-7(*d*) شکل

الفصل السابع

العلاقات الأساسية والمتطابقات

Basic Relationships And Identities

في هذا الفصل:

- ✔ العلاقات الأساسية
- ✔ تبسيط التعبيرات المثلثية
- ✔ المتطابقات المثلثية

العلاقات الأساسية — Basic Relationships

مقلوب العلاقات المثلثية Reciprocal Relationships	ناتج قسمة العلاقات المثلثية Quotient Relationships	علاقات فيثاغورث Pythagorean Relationships
$\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$	$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$		$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

والعلاقات المثلثية الأساسية صحيحة لكل قيم θ التي تشملها الدالة. وعلى سبيل المثال $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ تتحقق لكل قيم θ بينما

$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$ صحيحة لكل قيم θ حيث $\tan\theta$ معرفة. وهـذا يعنـى أن كل قيم θ حسب العلاقة $\theta \neq n \cdot 90°$ حيث n فرديـة. مـاعدا قيمـة θ التى تجعل $\sin\theta \neq 0$، $\cos\theta = 0$.

تبسيط التعبيرات المثلثية

Simplification of Trigonometric Expressions

من القواعد الشائعة تحويل أو اختصار التعبيرت التى تحوى دوال مثلثية إلى أبسط صورة.

مسألة محلولة 7.1 باستخدام العلاقة المثلثية $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ بسط التعبير المثلثى الآتى: $\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta$.

Solved Problem 7.1 Using the relation $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, simplify the trigonometric expression $\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta$.

الحل:

$$\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta = \sin\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \sin\theta(1) = \sin\theta$$

المتطابقات المثلثية Trigonometric Identities

المعادلات التى تشمل الدوال المثلثية وتحقـق لكـل قيـم θ فـى طرفـى المعادلة تسمى بالمتطابقات المثلثية. على سبيل المثال:

$$\cos\theta \csc\theta = \cot\theta \quad \text{and} \quad \cos\theta \tan\theta = \sin\theta$$

المتطابقات المثلثية تتحقق بنقل أحد طرفى المعادلة إلى الطرف الآخر (حسب الاختيار). وعمومًا يتم اختيار الطرف المعقد أو الأكثر صعوبة لتبسيط عملية الحل وفى بعض الحالات يتم نقل كل من طرفى المعادلة إلى نفس الصورة.

الخطوات العامة لتحقيق المتطابقات

General Guidelines for Verifying Identities

1. يجب معرفة العلاقات المثلثية الأساسية الثمانى ومرادفات كل منهم.
2. يجب معرفة خطوات جمع وطرح واختصار الكسور وتحويل الكسور إلى كسور مكافئة.
3. يجب الإلمام بعمليات التحليل المختلفة وطريقة الضرب البسيطة.
4. استخدام عمليات التعويض والاختصار لأحد طرفى المعادلة فى أبسط صورة.
5. اختار أحد طرفى المعادلة الأكثر تعقيدًا وحاول نقله إلى الطرف الآخر من المعادلة لتكون المعادلة أكثر وضوحًا.
6. حول كل طرف من طرفى المعادلة مستقلاً بنفس الصورة.
7. تجنب عمليات التعويض فى صورة المقلوب.
8. استخدم عمليات التعويض لتحويل كل الدوال المثلثية فى صورة sine، cosnie ثم اختصر.
9. أضرب كل من البسط والمقام فى مرافق أحدهما.
10. بسط كسور الجذور التربيعية بالضرب فى مرافق الجذر وتحويله إلى ناتج مربع تام.

مسألة محلولة 7.2 أثبت علاقات فيثاغورث للمعادلات المثلثية الآتية:

Solved Problem 7.2 Prove the Pythagorean relationships

(*a*) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, (*b*) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$,
(*c*) $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

الحل: من التمثيل البيانى للنقطة $P(x, y)$ فإن: $A = (x^2 + y^2 = r^2)$

(*a*) بقسمة A على r^2 فإن الناتج: $(x/r)^2 + (y/r)^2 = 1$

أى أن: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(*b*) بقسمة A على x^2 فإن الناتج: $1 + (y/x)^2 = (r/x)^2$

أى أن: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

وبقسمة طرفى المعادلة: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ على $\cos^2\theta$

يكون الناتج:

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 \text{ or } \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta.$$

(*c*) بقسمة A على y^2 فإن الناتج: $(x/y)^2 + 1 = (r/y)^2$

أى أن: $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

وبقسمة طرفى المعادلة: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ على $\sin^2\theta$

يكون الناتج:

$$1 + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 \text{ or } 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

الفصل الثامن
الدوال المثلثية لزاويتين
Trigonometric Functions of Two Angles

فى هذا الفصل:

- ✔ قوانين الجمع
- ✔ قوانين الطرح
- ✔ قوانين ضعف الزاوية
- ✔ قوانين نصف الزاوية

قوانين الجمع — Addition Formulas

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

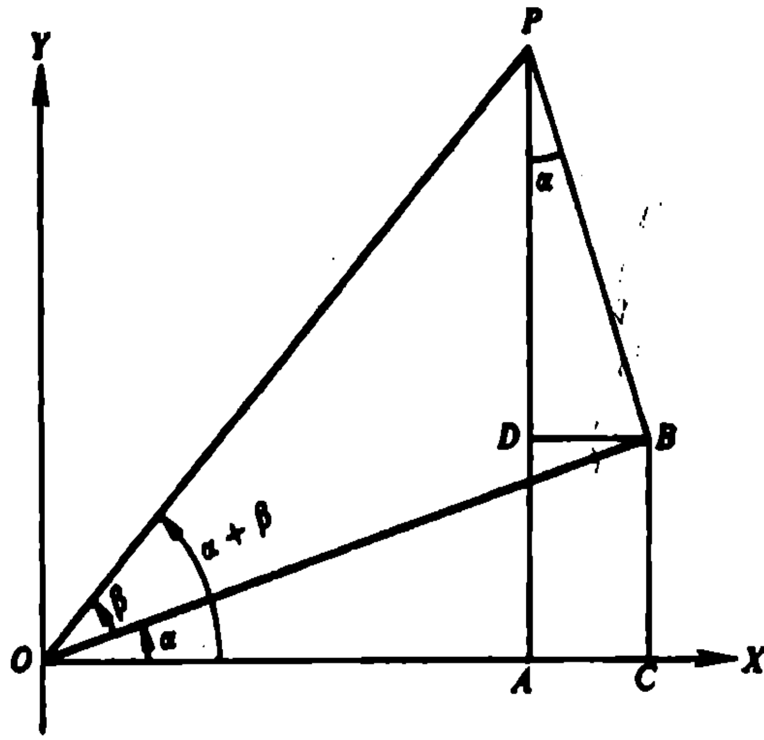
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\ \tan\beta}$$

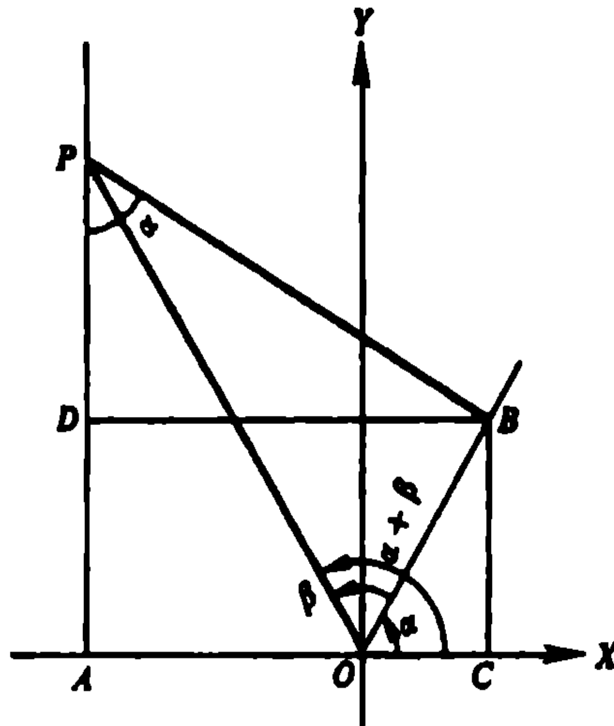
مسألة محلولة 8.1 أثبت قوانين الجمع للعلاقات المثلثية.

Solved Problem 8.1 Prove the addition formulas.

الحل: نفرض أن زاوية α وزاوية β هى زوايا حادة موجبة حيث $\alpha+\beta<90°$ شكل 8-1(*a*) أو $\alpha+\beta>90°$ شكل 8-1(*b*).



(a)



(b)

شكل 8-1

ولرسم هذه الأشكال نمثل زاوية α فى الوضع القياسى ونمثل زاوية β التى تشترك مع زاوية α فى الرأس O والضلع الأساسى للزاوية هو نفس الضلع الخارجى للزاوية α. ونفرض نقطة P على الضلع الخارجى لزاوية

$(\alpha+\beta)$. نرسم PA عمودى على المحور OX، ونرسم PB عمـودى علـى الضلع الخارجى لزاوية α، المســتقيم BC عمـودى علـى المحـور OX والمستقيم BD عمودى على المستقيم AP.

إذن: $\angle APB=\alpha$ لأن الأضلاع المتناظرة (OA و AP ، و OB و BP) هى أضلاع متعامدة: إذن

$$\sin(\alpha+\beta) =$$

$$\frac{AP}{OP}=\frac{AD+DP}{OP}=\frac{CB+DP}{OP}=\frac{CB}{OP}+\frac{DP}{OP}=\frac{CB}{OB}\cdot\frac{OB}{OP}+\frac{DP}{BP}\cdot\frac{BP}{OP}$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) =$$

$$\frac{OA}{OP}=\frac{OC-AC}{OP}=\frac{OC-DB}{OP}=\frac{OC}{OP}-\frac{DB}{OP}=\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OP}-\frac{DB}{BP}\cdot\frac{BP}{OP}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) =$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Subtraction Formulas قوانين الطرح

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\ \tan\beta}$$

مسألة محلولة 8.2 أثبت قوانين الطرح للعلاقات المثلثية.

Solved Problem 8.2 Prove the subtraction formulas.

الحل:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin[\alpha + (-\beta)] = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha(\cos\beta) + \cos\alpha(-\sin\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha(\cos\beta) - \sin\alpha(-\sin\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \tan[\alpha + (-\beta)] = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\ \tan(-\beta)}\\ &= \frac{\tan\alpha + (-\tan\beta)}{1 - \tan\alpha\ (-\tan\beta)}\\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\ \tan\beta}\end{aligned}$$

Double-Angle Formulas قوانين ضعف الزاوية

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مسألة محلولة 8.3 أثبت صحة قوانين ضعف الزاوية.

Solved Problem 8.3 Prove the double-angle formulas.

الحل: من قوانين الجمع للعلاقات المثلثية الآتية:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta},$$

نستبدل زاوية β بزاوية α ليكون ناتج التبديل العلاقات الآتية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Half-Angle Formulas قوانين نصف الزاوية

$$\sin \tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

مسألة محلولة 8.4 أثبت صحة قوانين نصف الزاوية.

Solved Problem 8.4 Prove the half-angle formulas.

الحل:

في العلاقة: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ استبدل زاوية α بالزاوية $(\tfrac{1}{2}\theta)$

لاستنتاج العلاقات الآتية:

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

في العلاقة: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ استبدل زاوية α بالزاوية $(\tfrac{1}{2}\theta)$

لاستنتاج العلاقات الآتية:

$$\cos\theta = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\theta - 1$$

$$\cos^2 ½\theta = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\cos ¼\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

وأخيرًا:

$$\tan ½\theta = \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

الإشارة ± ليست ذات أهمية في هذه الحالة لأن إشارة $\tan ¼\theta$ هي نفس إشارة $\sin\theta$ وإشارة $(1 - \cos\theta)$ هي دائمًا موجبة.

الفصل التاسع
قوانين الجمع والطرح والضرب للزوايا
Sum, Difference, And Product Formulas

في هذا الفصل:

- ✔ ضرب العلاقات المثلثية للجيب وجيب التمام
- ✔ المجموع والفرق للجيب وجيب التمام

ضرب العلاقات المثلثية للجيب وجيب التمام
Products of Sines and Cosines

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

مسألة محلولة 9.1 استنتج قوانين الضرب للعلاقات المثلثية.

Solved Problem 9.1 Derive the product formulas.

الحل:

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta) + (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

$$= 2\sin\alpha\cos\beta$$

ومن المعادلة الأساسية تستنتج أن:

$$\sin\alpha\cos\beta = ½[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

بما أن:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$

إذن:

$$\cos\alpha\sin\beta = ½[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

بما أن:

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

$$= 2\cos\alpha\cos\beta$$

ومن المعادلة الأساسية نستنتج أن:

$$\cos\alpha\cos\beta = ½[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

بما أن:

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$$

إذن:

$$\sin\alpha\sin\beta = -½[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

المجموع والفرق للجيب وجيب التمام

Sum and Difference of Sines and Cosines

$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$

مسألة محلولة 9.2 استنتج قوانين الجمع والفرق للجيب.وجيب التمام.

Solved Problem 9.2 Derive the sum and difference formulas.

الحل: نفرض أن: $\alpha + \beta = A$ و $\alpha - \beta = B$

من الفرض نستنتج أن: $\alpha = 1/2(A + B)$ و $\beta = 1/2(A - B)$

بالتعويض في المعادلة: $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

نستنتج أن : $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

بالتعويض في المعادلة: $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$

نستنتج أن : $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$

بالتعويض في المعادلة: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

نستنتج أن : $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

بالتعويض في المعادلة: $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \cos \beta$

نستنتج أن : $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B)$

الفصل العاشر
المثلثات المائلة
Oblique Triangles

في هذا الفصل:

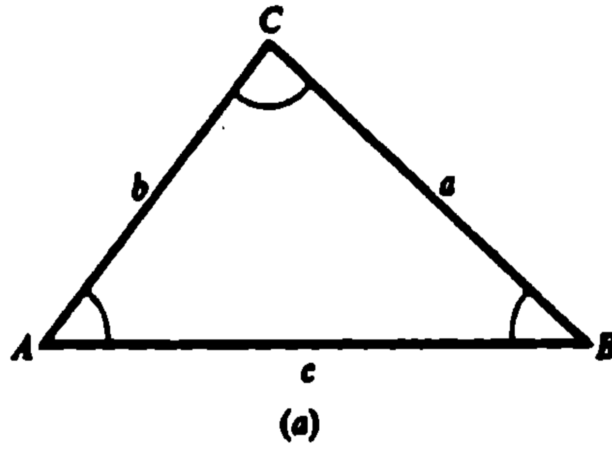
- ✔ المثلثات المائلة
- ✔ قانون الجيب
- ✔ قانون جيب التمام
- ✔ حل المثلثات المائلة

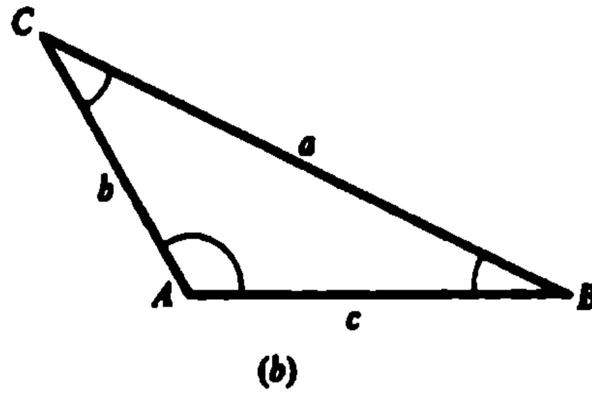
المثلثات المائلة Oblique Triangles



المثلث المائل oblique triangle هو مثلث لا يشمل ضمن زواياه الزاوية القائمة. وهو مثلث زواياه الثلاثة حادة أو زاويتان حادتان والزاوية الثالثة منفرجة.

وفي المثلث نرمز للزوايا بالحرف A، B، C والأضلاع بالحروف a، b، c. انظر شكل 10-1.





شكل 10-1

Law of Sines

قانون الجيب

فى أى مثلث ABC تتناسب الأضلاع مع جيوب الزوايا التى تقابل هذه الأضلاع فى المثلث.

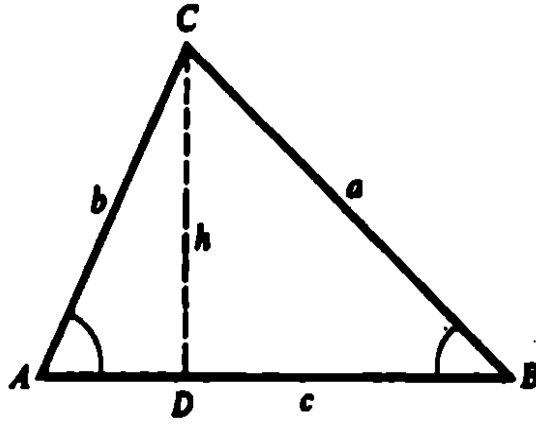
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \text{or} \quad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

مسألة محلولة 10.1 استنتج قانون الجيب لحل المثلث.

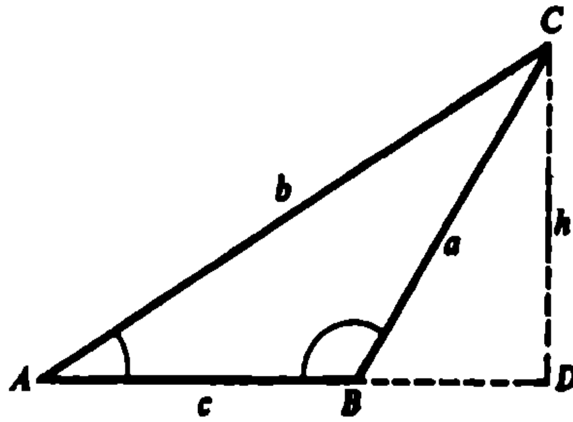
Solved Problem 10.1 Derive the law of sines.

الحل:

نفرض أن ABC أى مثلث مائل. فى شكل 10-2 الزاوية A والزاوية B هما زوايا حادة بينما فى شكل 10-3 زاوية B هى زاوية منفرجة.



شكل 2-10



شكل 3-10

نرسم CD عمودى على AB أو امتداد AB كما فى شكل 3-10 ونفرض أن طول العمود هو h. فى المثلث القائم الزاوية ACD فى كل من الشكلين $h = b \sin A$ بينما فى المثلث القائم الزاوية BCD طول العمود $h = a \sin B$.

إذن فى شكل 3-10 طول العمود h هو:

$$h = a \sin \angle DBC = a \sin (180° - B) = a \sin B$$

ومن طول العمود نستنتج أن

$$a \sin B = b \sin A \qquad \text{or} \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

وبنفس الطريقة السابقة (برسم عمود من نقطة B على AC أو عمود من نقطة A على BC) نستنتج أن:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \qquad \text{or} \qquad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

ومن المعادلات السابقة نستنتج أن:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

Law of Cosines قانون جيب التمام

فى أى مثلث ABC مربع أى ضلع فى المثلث يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين مطروحًا منه ضعف المستطيل المكون من أحد هذين الضلعين ومسقط الآخر عليه.

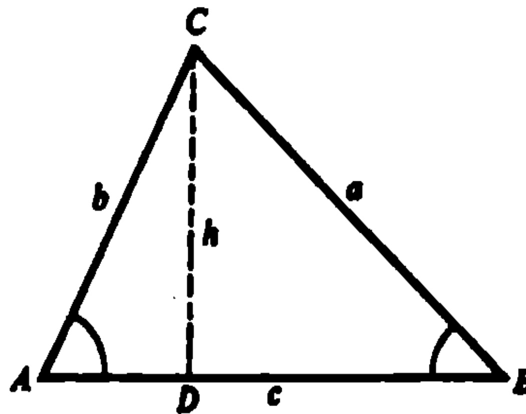
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

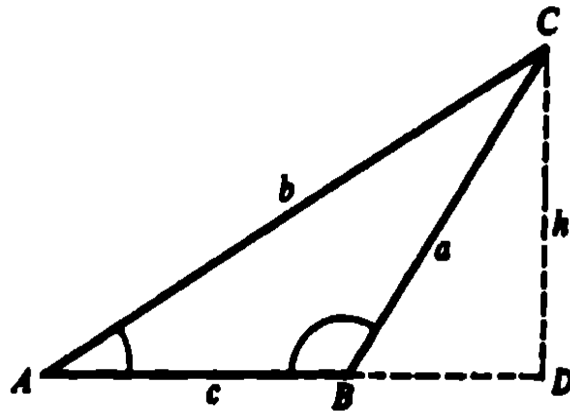
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

مسألة محلولة 10.2 استنتج قوانين جيب التمام لحل المثلث.

Solved Problem 10.2 Derive the law of cosines.



شكل 10-4



شكل 5-10

الحل:

من المثلث القائم الزاوية ACD فى كل من شكلى 4-10، 5-10 نستنتج أن:
$b^2 = h^2 + (AD)^2$.

من المثلث القائم الزاوية BCD فى شكل 4-10 نستنتج أن:

$h = a \sin B$ and $BD = a \cos B$

ولهذا فإن

$AD = AB - DB = c - a \cos B$

بالتعويض فى المعادلة:

$$b^2 = h^2 + (AD)^2 = a^2\sin^2 B + c^2 - 2ca \cos B + a^2\cos^2 B$$

$$= a^2(\sin^2 B + \cos^2 B) + c^2 - 2ca \cos B$$

$$= a^2 + c^2 - 2ca \cos B$$

من المثلث القائم الزاوية BCD لشكل 5-10. نستنتج أن:

$h = a \sin \angle CBD = a \sin (180° - B) = a \sin B.$

$BD = a \cos \angle CBD = a \cos (180° - B) = - a \cos B.$

إذن:

$$AD = AB + BD = c - a \cos B$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

والصور الأخرى لقوانين جيب التمام يمكن استنتاجها بالتغيير الدورى للحروف. على سبيل المثال: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

حل المثلثات المائلة Solution of Oblique Triangles

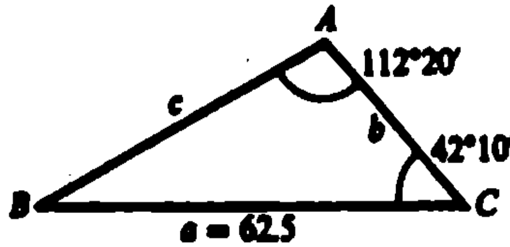
بمعلومية ثلاثة أجزاء من مثلث وليست كل زوايا المثلث معلومة، يمكن حل المثلث أى يمكن إيجاد أطوال الأضلاع الثلاثة وزوايا المثلث.

والحالات الخمس لحل المثلثات المائلة هى:

حالة I: بمعلومية زاويتين والضلع المقابل لأحد الزاويتين، يمكن إيجاد الضلع المقابل للزاوية الأخرى باستخدام قانون الجيب لحل المثلث.

مسألة محلولة 10.3 حل المثلث ABC إذا كان: $a = 62.5$، $A = 112°20'$، $C = 42°10'$. انظر شكل 10-6.

Solved Problem 10.3 Solve the triangle ABC, given $a = 62.5$, $A = 112°20'$, and $C = 42°10'$. See Figure 10-6.



شكل 10-6

الحل: لإيجاد زاوية B:

$$B = 180° - (C + A) = 180° - 154°30' = 25°30'$$

لإيجاد طول الضلع b:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{62.5 \sin 25°30'}{\sin 112°20'} = \frac{62.5(0.4305)}{0.9250} = 29.1$$

$$\left[\sin 112°20' = \sin(180° - 112°20') = \sin 67°40'\right]$$

لإيجاد طول الضلع c:

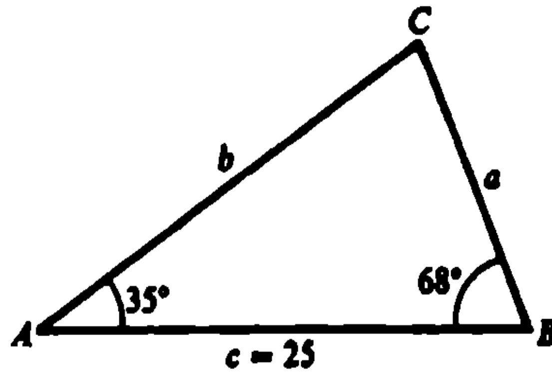
$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{62.5 \sin 42°10'}{\sin 112°20'} = \frac{62.5(0.6713)}{0.9250} = 45.4$$

الأجزاء المطلوبة هي: $b = 29.1$، $c = 45.4$، $B = 25°30'$.

حالة II: بمعلومية زاويتين على جانبي ضلع معلوم من المثلث، يمكن إيجاد الزاوية الثالثة واستخدام قانون الجيب لإيجاد الأضلاع الأخرى.

مسألة محلولة 10.4 حل المثلث ABC إذا كان: $c = 25$، $A = 35°$، $B = 68°$. انظر شكل 7-10.

Solved Problem 10.4 Solve the triangle ABC, given $c = 25$, $A = 35°$, and $B = 68°$. See Figure 10-7.



شكل 10-7

الحل:

لإيجاد زاوية C:

$$C = 180° - (A + B) = 180° - 103° = 77°$$

لإيجاد طول الضلع a:

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{25 \sin 35°}{\sin 77°} = \frac{25(0.5736)}{0.9744} = 15$$

لإيجاد طول الضلع b:

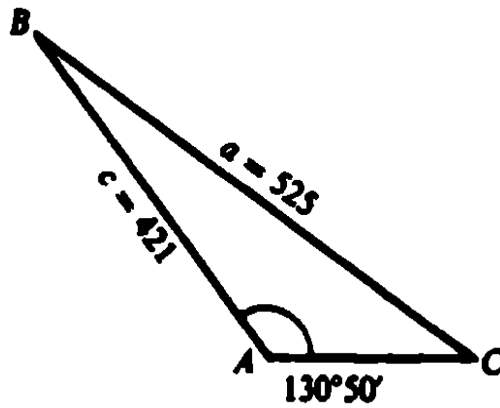
$$\text{For } b: \qquad b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{25 \sin 68^\circ}{\sin 77^\circ} = \frac{25(0.9272)}{0.9744} = 24$$

الأجزاء المطلوبة هي: $a = 15$، $b = 24$ و $B = 77^\circ$.

حالة III: بمعلومية ضلعين من المثلث والزاوية المقابلة لأحدهما وباستخدام قانون الجيب، يمكن إيجاد الزاوية المقابلة للضلع الآخر.

مسألة محلولة 10.5 حل المثلث ABC إذا كان: $a = 525$، $c = 421$، و $A = 130°50'$. انظر شكل 10-8.

Solved Problem 10.5 Solve the triangle ABC, given $a = 525$, $c = 421$, and $A = 130°50'$. See Figure 10-8.



شكل 10-8

الحل: حيث أن A هي زاوية منفرجة و $a > c$ إذن يوجد حل واحد للمثلث. لإيجاد زاوية C:

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{421 \sin 130°50'}{525} = \frac{421(0.7566)}{525} = 0.6067 \text{ and } C = 37°20'$$

لإيجاد زاوية B:

$$B = 180^\circ - (C + A) = 11°50'$$

لإيجاد طول الضلع b:

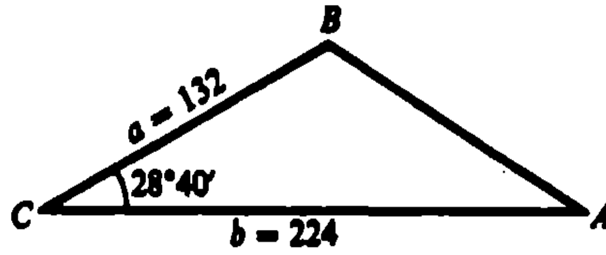
$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{525 \sin 11°50'}{\sin 130°50'} = \frac{525(0.2051)}{0.7566} = 142$$

الأجزاء المطلوبة هي: $C = 37°20'$، $B = 11°50'$ و $b = 142$.

حالة IV: بمعلومية ضلعين والزاوية المحصورة بينهما وباستخدام قانون جيب التمام، يمكن إيجاد طول الضلع الثالث.

مسألة محلولة 10.6 حل المثلث ABC إذا كان: $a = 132$ و$b = 224$ و$C = 28°40'$. انظر شكل 10-9.

Solved Problem 10.6 Solve the triangle ABC, given $a = 132$, $b = 224$, and $C = 28°40'$. See Figure 10-9.



شكل 10-9

الحل:

لإيجاد طول الضلع c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224) \cos 28°40'$$

$$= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224)(0.8774)$$

$$= 15{,}714$$

$$c = 125$$

لإيجاد زاوية A:

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{132 \sin 28°40'}{125} = \frac{132(0.4797)}{125} = 0.5066 \text{ and } A = 30°30'$$

لإيجاد زاوية B:

$$\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{224 \sin 28°40'}{125} = \frac{224(0.4797)}{125} = 0.8596 \text{ and } B = 120°40'$$

ملحوظة: (حيث أن: $b > a$ و A زاوية حادة)

(حيث أن $A + C < 90°$ و $B > 90°$).

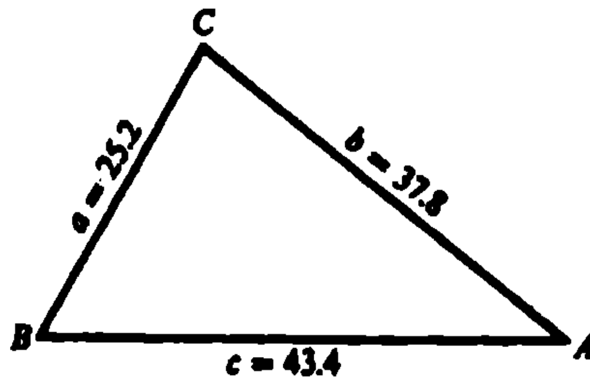
تأكد من الناتج: $A + B + C = 179°50'$

الأجزاء المطلوبة هي: $A = 30°30'$، $B = 120°40'$ و $c = 125$.

حالة V: بمعلومية الأضلاع الثلاثة وباستخدام قانون جيب التمام، يمكن إيجاد أي زاوية وبالتالي الزوايا الثلاثة.

مسألة محلولة 10.7 حل المثلث ABC إذا كان: $a = 25.2$، $b = 37.8$، $c = 43.4$. انظر شكل 10-10.

Solved Problem 10.7 Solve the triangle ABC, given $a = 25.2$, $b = 37.8$, and $c = 43.4$. See Figure 10-10.



شكل 10-10

الحل:

لإيجاد زاوية A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(37.8)^2 + (43.4)^2 - (25.2)^2}{2(37.8)(43.4)} = 0.8160$$

and $A = 35°20'$

لإيجاد زاوية B:

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(43.4)^2 + (25.2)^2 - (37.8)^2}{2(43.4)(25.2)} = 0.4982$$

and $B = 60°10'$

لإيجاد زاوية C:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(25.2)^2 + (37.8)^2 - (43.4)^2}{2(25.2)(37.8)} = 0.0947$$

and $C = 84°30'$

تأكد من الناتج: $A + B + C = 180°$.

الفصل الحادى عشر
مساحة المثلث
Area of a Triangle

فى هذا الفصل:

- ✔ مساحة المثلث
- ✔ قوانين المساحة

مساحة المثلث — Area of a Triangle

المساحة K لأى مثلث تساوى نصف حاصل ضرب القاعدة فى الارتفاع. وعمومًا يمكن إيجاد مساحة المثلث بمعلومية الأضلاع والزوايا للمثلث.

قوانين المساحة — Area Formulas

الحالتان I و II المعطى زاويتان وضلع فى المثلث ABC

Cases I and II. Given two angles and a side of triangle ABC

يمكن إيجاد الزاوية الثالثة باستخدام العلاقة: $A + B + C = 180°$ ومساحة المثلث تساوى مربع ضلع من أضلاع المثلث فى حاصل ضرب جيوب زوايا وجانبى الضلع مقسومًا على ضعف جيب الزاوية المقابلة لهذا الضلع. أى أن:

$$K = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}.$$

الحالة III. المعطى ضلعان من أضلاع المثلث وزاوية مقابلة لأحد الضلعين فى المثلث ABC

Case III. Given two sides and the angle opposite one of them in triangle *ABC*

يمكن إيجاد الزاوية الثانية للمثلث باستخدام قانون الجيب وتطبيق الحالة "I" لإيجاد مساحة المثلث بمعلومية ضلع وزاويتين من المثلث وفى جهة واحدة من الضلع المعلوم، ولذلك يوجد أحيانًا حلان لإيجاد مساحة المثلث بمعلومية الزاوية الثانية وضلعين من أضلاع المثلث. ولذلك يجب استخدام أكثر من طريقة عند إيجاد مساحة مثلثين أو أكثر.

الحالة IV. المعطى ضلعان من أضلاع المثلث وزاوية محصورة بين الضلعين فى المثلث ABC

Case IV. Given two sides and the included angle of triangle *ABC*

مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب ضلعين فى جيب الزاوية المحصورة بينهما. أى أن:

$$K = (1/2)ab \sin C = (1/2)ac \sin B = (1/2)bc \sin A$$

الحالة V. المعطى ثلاثة أضلاع فى المثلث ABC

Case V. Given the three sides of triangle *ABC*

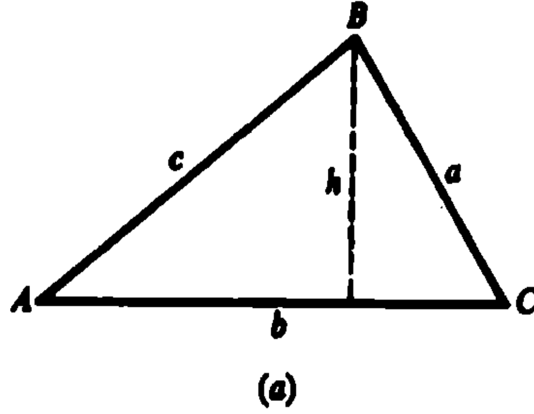
مساحة المثلث تساوى الجذر التربيعى لنصف المحيط مضروبًا فى نصف المحيط مطروحًا من الأضلاع الثلاثة كل على حدة.

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

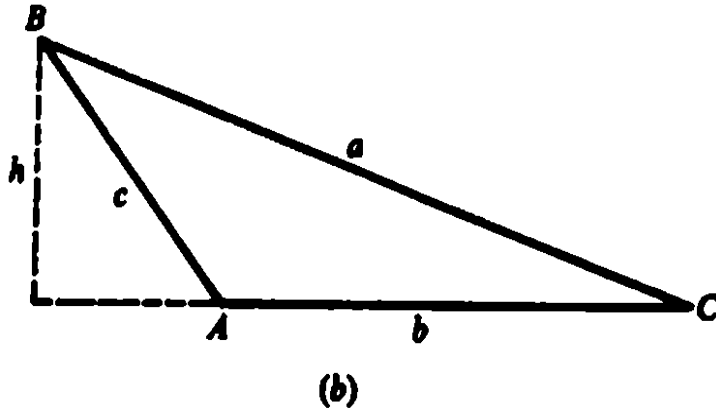
حيث أن: $s = 1/2(a + b + c)$

مسألة محلولة 11.1 استنتج العلاقة: $K = (^1/_2)bc \sin A$. انظر شكل 11-1.

Solved Problem 11.1 Derive the formula $K = (1/2)bc \sin A$. See Figure 11-1.



(a)



(b)

شكل 11-1

الحل: نفرض أن الارتفاع هو h فى كل من الشكلين حيث أن: $h = c \sin A$
ومن ذلك نستنتج أن:

$$K = (1/2)bh = (1/2)bc \sin A$$

مسألة محلولة 11.2 استنتج العلاقة الآتية:

Solved Problem 11.2 Derive the formula

$$K = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

الحل: من المسألة المحلولة 11-1. $K = (^1/_2)bc \sin A$.

وباستخدام قانون الجيب:

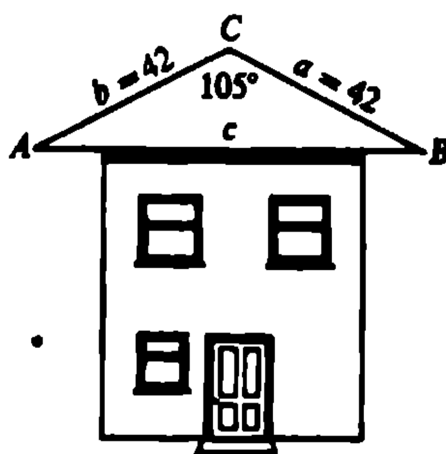
$$b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

ومن العلاقات السابقة نستنتج أن:

$$K = (½)bc \sin A = (½)\frac{c \sin B}{\sin C} c \sin A = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$$

مسألة محلولة 11.3 يحتاج دهان حساب مساحة سقف منزل جملونى الشكل إذا كان الشكل عبارة عن مثلث طول كل من ضلعيه المتساويين 42 قدم وزاوية الرأس لتقابل الضلعين هى 105°.

Solved Problem 11.3 A painter needs to find the area of the gable end of a house. What is the area of the gable if it is a triangle with two sides of 42.0 ft that meet at a 105° angle?



شكل 11-2

الحل: من شكل 11-2 نستنتج أن: $a = 42{,}0$ ft و b = 42,0 ft و C = 105°.

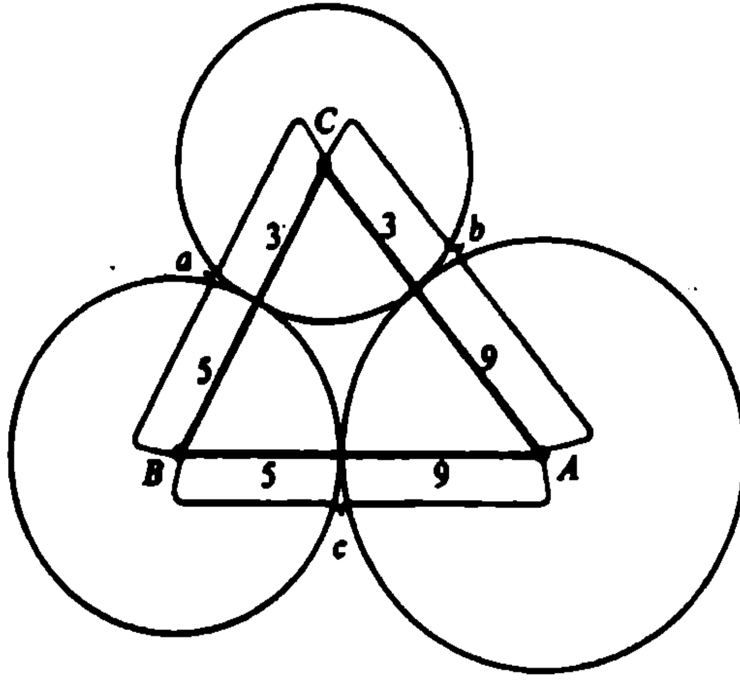
$$K = (½)ab \sin C$$

$$= (½)(42)(42) \sin 105°$$

$$= 852 \text{ ft}^2$$

مسألة محلولة 11.4 ثلاث دوائر متماسة من الخارج وأنصـاف أقطـارهم هى 3.0 cm و5.0 cm و9.0 cm علـى الـترتيب. احسـب مسـاحة المثلـث المكون من توصيل المراكز للدوائر الثلاث.

Solved Problem 11.4 Three circles with radii 3.0, 5.0, and 9.0 cm are externally tangent. What is the area of the triangle formed by joining their centers?



شكل 11-3

الحل: فى شكل 11-3 نستنتج أن: $a = 8$ cm و $b = 12$ cm و $c = 14$ cm.
حيث أن:

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = 17 \text{ cm}$$

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{17(17-8)(17-12)(17-14)}$$

$$= \sqrt{2295}$$

$$= 48 \text{ cm}^2$$

الفصل الثانى عشر
الدوال المثلثية العكسية
Inverses of Trigonometric Functions

فى هذا الفصل:

- ✔ علاقات الدوال المثلثية العكسية
- ✔ منحنيات العلاقات المثلثية العكسية
- ✔ الدوال المثلثية العكسية
- ✔ مدى القيمة الأساسية
- ✔ القيم العامة للعلاقات المثلثية العكسية

علاقات الدوال المثلثية العكسية
Inverse Trigonometric Relations

المعادلة:

$$x = \sin y$$

تعرف قيمة وحيدة لـ من x لكل زاوية من زوايا y المعطاة فى المعادلة. ولكن عندما تكون x معلومة يحتمل أن لا يكون هناك حل للمعادلة أو توجد عدة حلول. وعلى سبيل المثال لا يكون هناك حل للمعادلة عندما $x = 2$ حيث أن جيب أى زاوية معلومة لا يزيد عن الواحد الصحيح.

وعندما $x = {}^{1}/_{4}$ يوجد عدة حلول للمعادلة.

وهى: $y = 30°, 150°, 390°, 510°, -210°, -330°, \ldots$

$$y = \arcsin x$$

وبالرغم من استخدام كلمة arc فى العلاقة السابقة فإنه يمكن تعريف y بالزاوية التى جيبها مساويًا x وبطريقة مشابهة يمكن كتابة العلاقة: $y = \arccos x$ حيث أن $x = \cos y$ و $y = \arctan x$، حيث أن $x = \tan y$ وهكذا.

والعلاقات الرمزية $y = \sin^{-1} x$ و $y = \cos^{-1} x$ يمكن قرأتها على أساس معكوس الجيب للزاوية x. ومعكوس جيب التمام للزاوية x يمكن استخدامه أيضًا عند كتابة العلاقات المثلثية العكسية. ولكن يمكن أن يحدث خلط بين العلاقة $\sin^{-1} x$ والعلاقة $1/\sin x = (\sin x)^{-1}$. ولذلك يجب العناية عند كتابة الأس السالب للدوال المثلثية عند الحاجة إلى ذلك.

منحنيات العلاقات المثلثية العكسية

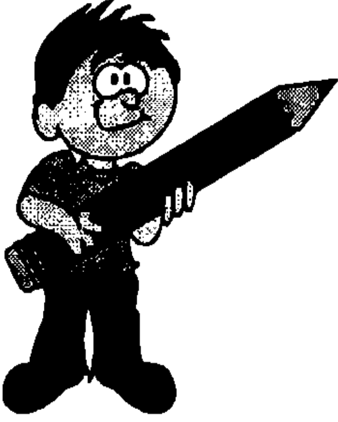
Graphs of the Inverse Trigonometric Relations

منحنى العلاقة: $y = \arcsin x$ هو نفس المنحنى للعلاقة $x = \sin y$ ويختلف عن منحنى العلاقة $y = \sin x$ حيث أن x و y تم تبديلها. ولذلك فإن المنحنى $y = \arcsin x$ هو عبارة عن منحنى الجيب مرسوم على المحور الصادى بدلاً من المحور السينى.

وبالمثل فإن منحنيات الدوال المثلثية العكسية الأخرى هى نفس منحنيات الدوال المثلثية مع اختلاف أدوار x و y.

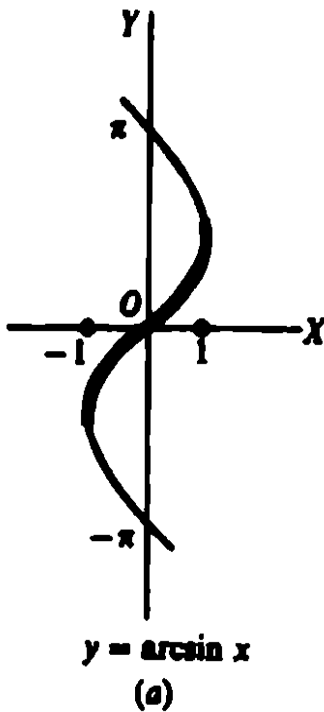
الدوال المثلثية العكسية

Inverse Trigonometric Functions

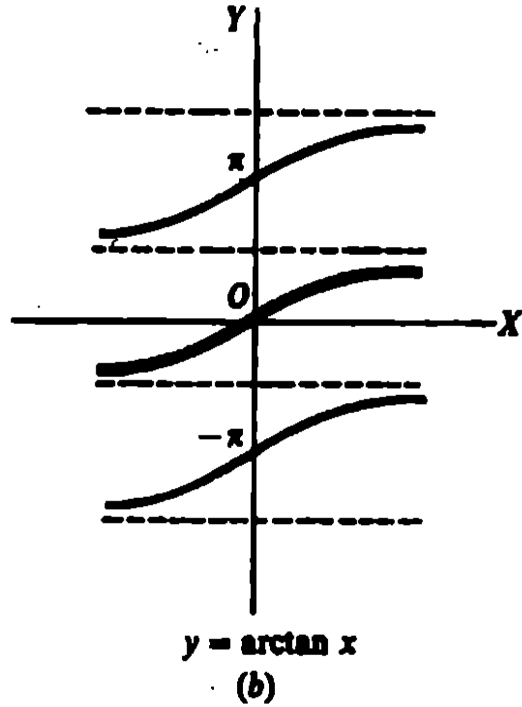


إنه من الضـــرورى اعتبـار أن العلاقـات المثلثيـة العكسية دوال. (وهذا يعنـــى أن أى قيمـة مـن y تناظرها قيمة وحيدة مـــن x) ولعمـل ذلـك سـوف نختار واحدة من الزوايا تناظرهـا القيمـة المعطـاة من x. على سبيل المثال عند $x = {}^1/_2$ سوف تختار قيمة $y = \pi/6$ وعندما $x = -{}^1/_2$ سـوف نختار قيمة $y = -\pi/6$. وهذه القيم المختارة الأساسية سوف تحكـــم العلاقـة $\arcsin x$ و $\arccos x$، إلخ. والرموز المرادفة لعلاقات الدوال المثلثية العكســية هـى. $\sin^{-1} x$، $\cos^{-1} x$، $\tan^{-1} x$، إلخ. وأجزاء المنحنى حيث القيم الأساسية لكل من العلاقات المثلثية العكسية موضحة فى شكل 12-1(a) إلى (f) بخط واضح وسميك.

عندما تكون x موجبة أو مساوية للصفر في وجود الدالة العكسية فإن القيمة الأساسية هى قيمة y الواقعة بين 0 و $\pi/2$ كاملة.

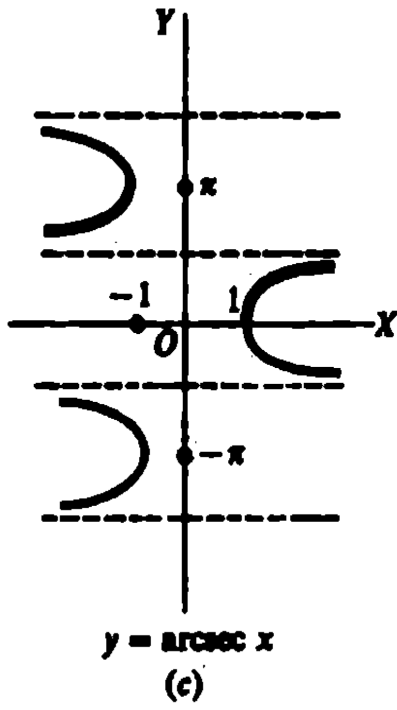


$y = \arcsin x$
(a)

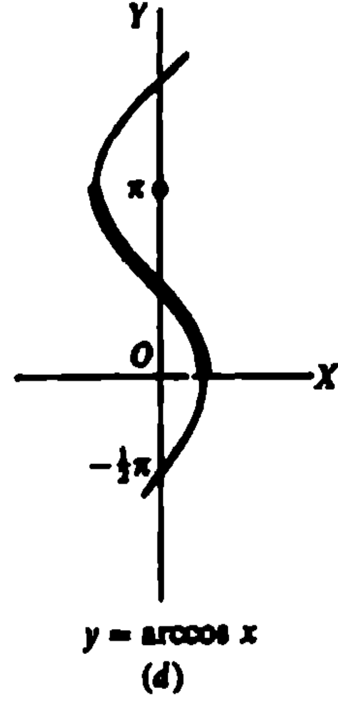


$y = \arctan x$
(b)

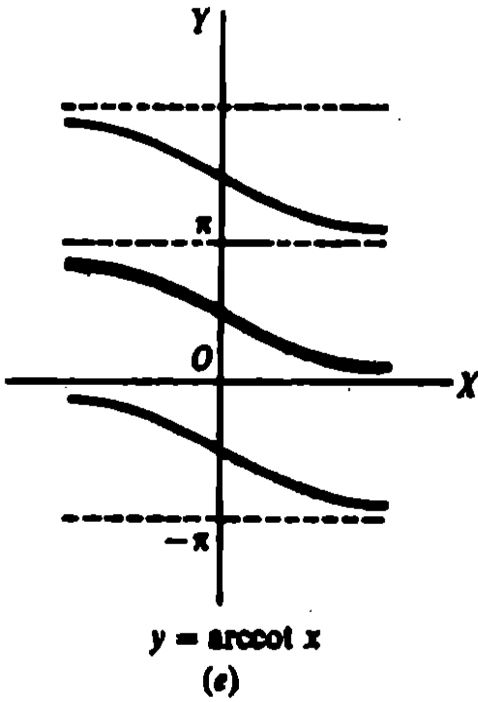
شكل 12-1



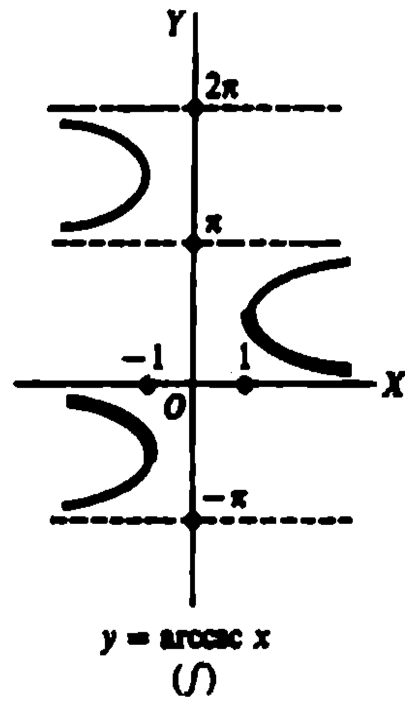
y = arcsec x
(c)



y = arccos x
(d)



y = arccot x
(e)



y = arccsc x
(f)

تابع شكل 12-1

مدى القيمة الأساسية Principal-Value Range

اختلف المؤلفون فى تعريف القيمة الأساسية للدوال العكسية عندما تكـون قيمة x سالبة. والتعاريف المعطاة هى الأنسب لعلم التفاضل. فـى معظـم الكتب لعلوم التفاضل تعرف الدوال المثلثية العكسية علـى أسـاس أنـها

القيمة الأساسية العكسية ولا تستخدم الحروف الكبيرة (Capital Letter) فى رموز العلاقات العكسية. وعمومًا لا تسـبب الـدوال العكسـية أى مشـاكل عند دراسة علم التفاضل.

القيم العامة للعلاقات المثلثية العكسية

General Values of Inverse Trigonometric Relations

نفرض أن y هى دالة مثلثيـة عكسـية لـها علاقـة مـع x وحيـث أن قيمـة العلاقة المثلثية العكسية y معلومة فإن هناك وضعيـن يمكـن تحديدهمـا بالنسبة للضلع الخارجى للزاوية y. نفرض أن y_1 و y_2 هما علـى الـترتيب الزوايا المحددة بوضعـى الضلـع الخـارجى ولذلـك فـإن القيمـة الكليـة للزاوية y المكونة من الزاويتين y_1 و y_2 معًا ومع كل الزوايا المطابقة لهما هى:

$$y_1 + 2n\pi \quad \text{and} \quad y_2 + 2n\pi$$

حيث أن n هى أى عدد صحيح موجب أو سالب أو يساوى الصفر.

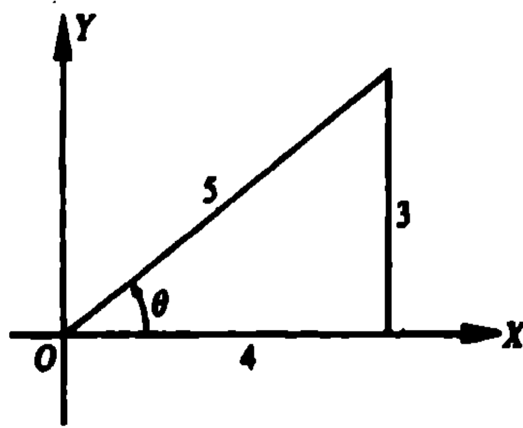
وإحدى قيم y_1 و y_2 يمكـن اتخاذهـا دائمًـا القيمـة الأساسـية للدالـة المثلثية العكسية.

مسألة محلولة 12.1 أوجد قيمة كل من الدوال الآتية:

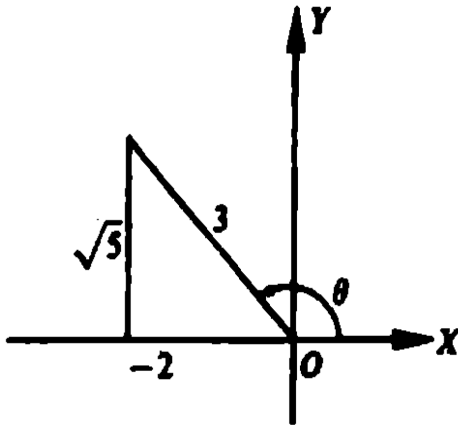
Solved Problem 12.1 Evaluate each of the following:

(*a*) cos (arcsin 3/5), (*b*) sin[arccos (−2/3)], and (*c*) tan[arcsin (−3/4)]

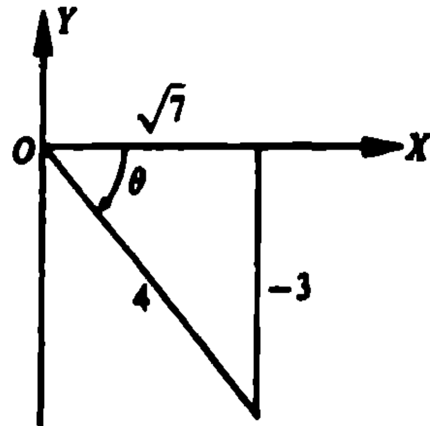
الحل:



(a)



(b)



(c)

شكل 12-2

(a) نفرض أن: $\theta = \arcsin 3/5$، إذن $\sin \theta = 3/5$

من الشكل 12-1(a). الوضع القياسى لزاوية θ فى الربع الأول.

$$\cos(\arcsin 3/5) = \cos\theta = 4/5$$

(b) نفرض أن: $\theta = \arccos(-2/3)$، إذن $\cos\theta = -2/3$

من الشكل 12-1(b). الوضع القياسى لزاوية θ فى الربع الثانى.

$$\sin[\arccos(-2/3)] = \sin\theta = \sqrt{5}/3$$

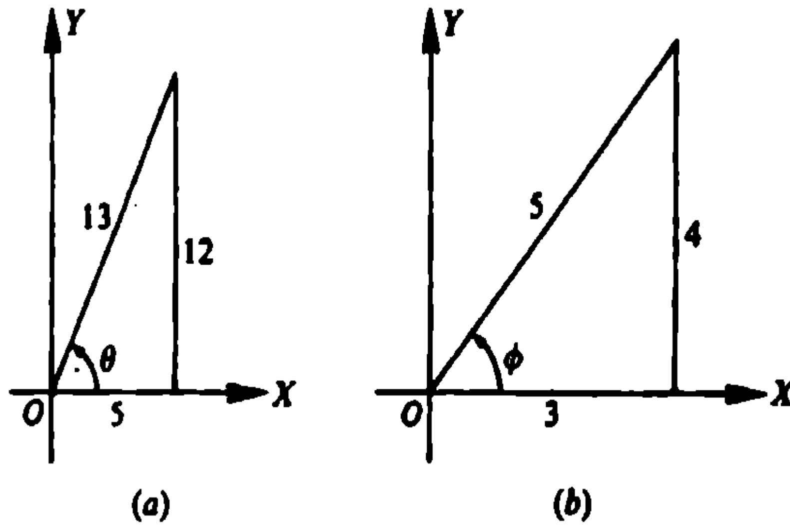
(c) نفرض أن: $\theta = \arcsin(-3/4)$، إذن $\sin\theta = -3/4$

من الشكل 12-1(c). الوضع القياسى لزاوية θ فى الربع الرابع.

$$\tan[\arcsin(-3/4)] = \tan\theta = -3/\sqrt{7} = -3\sqrt{7}/7$$

مسألة محلولة 12.2 أوجد قيمة ما يأتى **Solved Problem 12.2** Evaluate

$$\sin(\arcsin 12/13 + \arcsin 4/5)$$



شكل 12-3

الحل: نفرض أن:

$$\theta = \arcsin 12/13$$

$$\phi = \arcsin 4/5$$

ومن الشكل (b) و (a)12-2 نستنتج أن زاويـة θ و ϕ تقعـان فـى الربـع الأول.

$$\sin(\arcsin 12/13 + \arcsin 4/5) = \sin(\theta + \phi)$$

$$= \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$ (قانون المجموع)

$$= \frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5} + \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{56}{65}$$

الفصل الثالث عشر
المعادلات المثلثية
Trigonometric Equations

فى هذا الفصل:

- ✔ **المعادلات المثلثية**
- ✔ **حل المعادلات المثلثية**

المعادلات المثلثية Trigonometric Equations

المعادلات المثلثية هى المعادلات التى تشمل دوال النسب المثلثية لزوايا غير معلومة وهى تنقسم إلى:

(a) معادلات متطابقة أو متطابقات وتحققها كل الزوايا غير المعلومة المعرفة بالدالة.

(b) معادلات شرطية وتحققها بعض قيم الزوايا الخاصة غير المعلومة.



وفي هذا الفصل سوف نستخدم مصطلح معادلة equation بدلاً من المعادلة الشرطية conditional equation.

ولحل المعادلة المثلثية $\sin x = 0$ لإيجاد قيمة الزاوية x التى تحقق المعادلة يوجد حلان للمعادلة $\sin x = 0$ وهما: $x = 0$ و $x = \pi$.

إذا كان هناك حل للمعادلة المثلثية المعطاة فإنه عمومًا يوجد عدد

غير محدود من الحلول للمعادلة ولذلك فإن الحل الكامل للمعادلة: $\sin x = 0$ معطى بالعلاقة الآتية:

$$x = 0 + 2n\pi \qquad x = \pi + 2n\pi$$

حيث أن n: هى أى عدد موجب أو سالب أو يساوى الصفر.

حل المعادلات المثلثية Solving Trigonometric Equations

لا توجد طريقة عامة لحل المعادلات المثلثية، لكن توجد عدة خطوات قياسية موضحة فى الأمثلة الآتية وخطوات أخرى موضحة بالمسائل المحلولة الآتية. وكل الحلول سوف تكون فى الفترة $0 \leq x < 2\pi$.

(A) إمكانية تحليل المعادلات المثلثية

(A) The equation may be factorable

مسألة محلولة 13.1 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example13.1: Solve:

$$\sin x - (2 \sin x \cos x) = 0$$

الحل: حلل المعادلة: $\sin x - 2 \sin x \cos x = 0$

ليكون ناتج التحقيق به $\sin x (1 - 2 \cos x) = 0$

بمساواة كل عامل من عوامل المعادلة بالصفر يكون الناتج:

$$\sin x = 0 \quad \text{and} \quad x = 0, \pi$$

$$\text{or } 1 - 2 \cos x = 0 \quad \text{and} \quad \cos x = 1/2 \quad \text{and} \quad x = \pi/3, 5\pi/3$$

وبالتعويض عن قيم x فى المعادلة الأصلية: $\sin x - 2 \sin x . \cos x$

عند $x = 0$ $\quad \sin x - 2 \sin x \cos x = 0 - 2(0)(1) = 0$

عند $x = \pi/3$ $\quad \sin x - 2 \sin x \cos x = 1/2\sqrt{3} - 2(1/2\sqrt{3})(1/2) = 0$

عند $x = \pi$ $\sin x - 2\sin x\cos x = 0 - 2(0)(-1) = 0$

عند $x = 5\pi/3$ $\sin x - 2\sin x\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2(-\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}) = 0$

إذن الحل المطلوب فى الفترة $(0 \le x < 2\pi)$ هو: $x = 0$، $\pi/3$، π و $5\pi/3$.

(B) التعبير عن الدوال المتنوعة بالمعادلة بدالة فردية بسيطة

(B) The various functions occurring in the equation may be expessed in terms of a single function

مسألة محلولة 13.2 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example13.2: Solve:

$$\sec x + \tan x = 0$$

الحل: بضرب طرفى المعادلة:

$$\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

فى $\cos x$ ليكون ناتج الضرب:

$$1 + \sin x = 0 \quad \text{or} \quad \sin x = -1$$

وبحل المعادلة يكون الناتج $x = 3\pi/2$. وليست الدوال $\sec x$ و $\tan x$ معرفة عندما $x = 3\pi/2$ ولذلك فإن المعادلة ليس لها حل.

(C) تربيع طرفى المعادلة

(C) Both members of the equation are squared

مسألة محلولة 13.3 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example13.3: Solve:

$$\sin x + \cos x = 1$$

الحل: إذا اتبعنا الخطوات المستخدمة فى الطريقة (B) سوف تستبدل $\sin x$ بالمقدار $\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ أو $\cos x$ بالمقدار $\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ وبالتالى سوف تظهر مشكلة الجذر فى المعادلة. ولتجنب ذلك نكتب المعادلة على الصورة الآتية:

$$\sin x = 1 - \cos x$$

وبتربيع طرفى المعادلة يكون الناتج:

$$\sin^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 2 \cos x = 2 \cos x (\cos x - 1) = 0$$

من المعادلة. $\cos x = 0$، $x = \pi/2$، $x = 3\pi/2$.

ومن المعادلة. $\cos x = 1$، $x = 0$

وبالتعويض عن قيم x فى المعادلة الأصلية:

عند $x = 0$	$\sin x + \cos x =$	$0 + 1 = 1$
عند $x = \pi/2$	$\sin x + \cos x =$	$1 + 0 = 1$
عند $x = 3\pi/2$	$\sin x + \cos x =$	$-1 + 0 \neq 1$

ولذلك فإن حل المعادلة هو: $x = 0$ و $x = \pi/2$.

وقيمة $x = 3\pi/2$ تسمى حل إضافى للمعادلة الناتجة من تربيع طرفى المعادلة الأصلية ولاحظ أن المعادلة:

$$\sin^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

يتم الحصول عليها بتربيع طرفى المعادلة: $\sin x = \cos x - 1$

ولذلك فإن $x = 3\pi/2$ تحقق هذه المعادلة الأخيرة.

(D) الحل باستخدام القيم التقريبية

(D) Solutions are approximate values

مسألة محلولة 13.4 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example13.4: Solve:

$$4 \sin x = 3$$

الحل: من المعادلة: $4 \sin x = 3$

نستنتج أن: $\sin x = 3/4 = 0.75$

والزاوية المنتسبة هى 0.85 والحل بالنسبة لقيمة x هو:

$$x = 0.85 \quad \text{و} \quad x = \pi - 0.85 = 3.14 - 0.85 = 2.29$$

ولتحقيق الناتج فى المعادلة الأصلية:

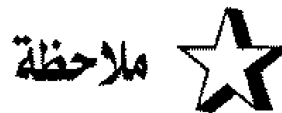
عند $x = 0.85$: $4 \sin 0.85 = 4(0.7513) = 3.0052 \approx 3$

عند $x = 2.29$: $4 \sin 2.29 = 4[\sin (3.14 - 2.29)]$

$$= 4[\sin 0.85] = 4[0.7513] = 3.0052 \approx 3$$

وعند استخدام الآلة الحاسبة يمكن حساب $\sin 2.29$ مباشرة ولذلك فإن ناتج: $4 \sin 2.29 = 4(0.7513) = 3.0092 \approx 3$.

وناتج الحل لأقرب رقم مئوى دائرى هو 0.85 و 2.29.



ملاحظة

عند استخدام الناتج التقريبى لتحقيق المعادلة يجب استخدام رمز التقريب $\approx$ ليوضح أن الناتج يساوى تقريبًا القيمة المطلوبة.

(E) معادلات تشمل مضاعفات الزاوية

(E) Equation contains a multiple angle

مسألة محلولة 13.5 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example13.5: Solve:

$$\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$$

الحل:

$$\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$$

بالتعويض عن $\cos 2x$:

$$(1 - 2\sin^2 x) - 3\sin x + 1 = 0$$

بضرب المعادلة فى (−)

$$-2\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$$

يكون الناتج:

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

ومن المعادلة: $2\sin - 1 = 0$

$$\sin x = {}^1/_2$$

$$x = \pi/6 \text{ و } x = 5\pi/6$$

ومن المعادلة: $\sin x + 2 = 0$

$$\sin x = -2$$

لا يوجد حل للمعادلة حيث أن: $-1 \le \sin x \le 1$ لكل قيم x.

ولذلك فإن حل المعادلة المطلوبة هو: $5\pi/6$ و $x = \pi/6$.

(F) معادلات تشمل أنصاف الزوايا

(F) Equations containing half angles

مسألة محلولة 13.6 حل المعادلة المثلثية الآتية:

Solved Example13.5: Solve:

$$4 \sin^2 (1/2)x = 1$$

الحل:

$$4 \sin^2 (1/2)x = 1$$

بقسمة طرفة المعادلة على 4: $\sin^2 (1/2)x = 1/4$

$$\sin (1/2)x = \pm 1/2$$

قيم x المطلوبة فى حل المعادلات المثلثية تكون خلال الفترة: $0 \le x < 2\pi$ ولذلك فإن قيمة x المطلوبة فى حل المعادلة فــى المثـال الســابق تكـون خلا ل الفترة $0 \le (1/2)x < \pi$.

من المعادلة:

$$\sin (1/2)x = 1/2 \quad (1/2)\, x = \pi/6 \ \text{and} \ 5\pi/6$$

$$x = \pi/3 \quad \text{and} \quad x = 5\pi/3$$

ومن المعادلة $\sin (1/2)x = -(1/2)$. لا يوجد حل للمعادلة حيث أن: $\sin (1/2)x \ge 0$ لكل قيم x خلا ل الفترة $0 \le (1/2)x < \pi$.

لتكون قيم x المطلوبة هى: $x = \pi/3$ و $5\pi/3$.

قائمة المصطلحات العلمية (إنجليزى/عربى)

(A)

Abscissa الإحداثيات

Acute angles الزوايا الحادة

Adjacent side الضلع المجاور

Air navigation الملاحة الجوية

Amplitude السعة

Angles and applications

الزوايا وتطبيقاتها

Angular velocity السرعة الزاوية

Approximate numbers الأعداد التقريبية

Arc length طول القوس

Area of a sector مساحة القطاع

Area of a triangle مساحة المثلث

(B)

Basic relationships and identities

العلاقات الأساسية والمتطابقات

Bearing الاتجاه الزاوى

(C)

Circles الدوائر

Cofunction الدوال المرافقة

Complementary angles

الزوايا المتتامة

Components of a vector مركبات المتجه

Conditional equations

المعادلات الشرطية

Coordinates الإحداثيات

in a plane فى المستوى

on a circle على الدائرة

on a line على خط

Cosines جيب التمام

Coterminal angles زوايا متطابقة

(D)

Degree درجة

Depression angles زوايا الانخفاض

Directed line مستقيم متجه

Distance of P بعد P

(E)

Elevation angles زوايا الارتفاع

Equations المعادلات

(F)

First quadrant angle زاوية الربع الأول

Formulas قوانين

addition of angles جمع الزوايا

area of a triangle مساحة المثلث

double-angle ضعف الزاوية

half-angle نصف الزاوية

products of sines and cosines

حاصل ضرب الجيب وجيب التمام

subtraction of angles

طرح الزوايا

sum and difference of sines and cosines

قوانين الجمع والفرق للجيب وجيب التمام

(G)

General angles الزوايا العامة

Given function value angles

قيمة الزوايا للدالة

Graphs المنحنيات

(H)

Horizontal and vertical shifts

نقل المحاور الأفقية والرأسية

Hypotenuse الوتر

(I)

Identities المتطابقات

Inclined plane المستوى المائل

Inverses of trigonometric functions

الدوال المثلثية العكسية

(L)

Law of cosines قوانين جيب التمام

Law of sines قوانين الجيب

Line representations

تمثيل الخط المستقيم

(M)

Measures of angles قياس الزوايا

Minute دقيقة

(N)

Negative angles الزوايا السالبة

Number scale مقياس العدد

(O)

Oblique triangles المثلثات المائلة

Omega العدد التخيلى

Opposite side الضلع المقابل

Ordinate إحداثى

Origin نقطة الأصل

(P)

Periodic functions الدوال الدورية

Plane angle زاوية مستوية

Practical applications تطبيقات عملية

Principal-value range

القيمة الأساسية للمدى

Pythagorean relationships

علاقات فيثاغورث

(Q)

Quadrantal angles زوايا ربعية

Quadrant signs of the functions

الإشارات الربعية للدوال

Quotient relationships

علاقات ناتج القسمة

(R)

Radian دائرى

Radius vector of P

المتجه نصف القطرى لنقطة

Reciprocal relationships

علاقات مقلوب النسب

Rectangular coordinate system

نظم الإحداثيات الكارتيزية

Reduction to functions of positive acute angles

الاختصار لدوال الزوايا الموجبة الحادة

Reference angles الزوايا المنتسبة

Resultant المحصلة

(S)

Simplification of expressions

تبسيط التعبيرات

Sine جيب

Sine curves منحنيات الجيب

Standard position angles

الوضع القياسى للزوايا

(T)

Trigonometric equations

المعادلات المثلثية

Trigonometric functions of a general angle

الدوال المثلثية للزوايا العامة

Trigonometric functions of an acute angle

الدوال المثلثية للزوايا الحادة

Trigonometric functions of two angles

الدوال المثلثية لزاويتين

(U)

Undefined functions الدوال غير المعرفة

(V)

Values for functions قيمة الدوال

Vectors المتجهات

Vector sum جمع المتجهات

Verifying identities تحقيق المتطابقات

Vertex الرأس

(X)

X coordinate الإحداثى السينى

(Y)

Y coordinate الإحداثى الصادى

Study Guides/Mathematics

When you don't have the time ... but you still need the grade!

If your life is too busy to spend hours ploughing through weighty textbooks, and you need every study minute to count, *Schaum's Easy Outline* is perfect for you! This super-condensed, high-torque study guide gives you what you need to know in a fraction of the time.

SUPER-IMPACT

Built for quick, effective study, this *Easy Outline* packs exciting new learning tools that make mastering trigonometry fast, fun—and almost automatic.

SPEEDY

Quick-study experts slashed the time you need to spend with your books by reducing trigonometry to the essentials the professor expects you to know. This *Easy Outline* is perfect for test preparation, pre-exam review, and handling those last-minute cram situations.

HI-QUALITY

Easy Outlines give you 100% of the authority of Schaum's full-sized guides, known around the world for the highest academic standards.

BACKPACK-ABLE STUDY POWER

Compact and portable, this *Easy Outline* lets you study trigonometry anywhere.

SCHAUM'S GETS THE GRADE!

Let's talk bottom line. *Schaum's Easy Outlines* give you what you want—better grades, with less work, and more free time!

Get the essence of trigonometry the easy way. *Schaum's Easy Outline* of *Trigonometry* helps you master trigonometry with plenty of illustrations, memory joggers, and the newest, rapid-absorption teaching techniques. Backed by Schaum's reputation for academic authority, this is the study guide students turn to and trust. Students know that Schaum's is going to be there for them when they need it!

- Quick study tips
- Student-friendly style
- At-a-glance tables
- Perfect for test prep



The McGraw-Hill Companies

Visit us at: www.books.mcgraw-hill.com

ISBN 977-282-145-7



Arabic version by:

International House for Cultural Investments S.A.E.

حصريات



www.ibtesama.com